

## ***Prefață***

Această lucrare a fost concepută ca o sinteză a lecțiilor de mecanică predate de autor, de-a lungul ultimului deceniu, studenților din anul II al Facultății de Matematică a Universității București. Ea prezintă elementele fundamentale ale mecanicii clasice, privind statica și dinamica punctelor materiale și a sistemelor de puncte materiale, precum și descrierea matematică a evoluției lor, raportată la sisteme inerțiale și ne-inerțiale. Sunt avute în vedere numeroase aplicații semnificative, cum ar fi studiul mișcării kepleriene, a mișcării relative, raportată la sistemele inerțiale geocentrice și heliocentrice, precum și analiza mișcării sistemelor rigide.

Au fost considerate subiecte suplimentare programei analitice obligatorii (marcate cu asterisc) privind studiul calitativ al evoluției sistemelor conservative unidimensionale cu aplicații în analiza calitativă a orbitelor, din problema celor două corpuri, ca și utilizarea metodei „energetice” în clasificarea traiectoriilor în cazul mișcării kepleriene.

Cursul este însoțit de un număr de exerciții și probleme, ce pot fi folosite la orele de seminar. El utilizează noțiuni și rezultate din cursurile din anul I (Analiză, Geometrie și Algebră), precum și din anul II (Ecuații diferențiale, Teoria măsurii). Acest curs are o prelungire naturală în cursul de Mecanică analitică din anul III, ca și în cel de Astronomie.

El se adresează studenților din anul II – Matematică și anul IV – Matematică-Informatică, de la Facultatea de Matematică, ca și tuturor studenților interesați de modelarea matematică a fenomenelor naturii.

Autorul mulțumește tuturor celor care l-au sprijinit în elaborarea acestei lucrări. În mod special, îi este recunoscător domnului academician Lazăr Dragoș pentru toate sfaturile utile și pentru ajutorul continuu acordat de-a lungul elaborării acestei lucrări. Un gând bun și multe mulțumiri domnului profesor Nicolae Marcov pentru toate discuțiile purtate pe marginea textului.

București, iunie 2003

Olivian Simionescu-Panait

### *Introducere. Privire istorică asupra mecanicii clasice*

- Mecanica este știința naturii care se ocupă cu studiul echilibrului și al mișcării corpurilor materiale. Acestea pot fi planete, corpuri macroscopice, molecule sau atomi, ce pot fi modelate drept *puncte materiale*, *sisteme de puncte materiale* sau *corpuri rigide*.

Conceptele de bază ale mecanicii sunt *spațiul*,  *timpul* și *masa* (sau, alternativ, *forța*). Dezvoltarea mecanicii a avut loc prin evoluția *geometriei*, *cinematicii* și *dinamicii*.

- *Geometria* cea mai simplă și cea mai des folosită în mecanică este geometria euclidiană. Ea reprezintă cadrul ideal al studiului mișcării sistemelor de puncte materiale și a corpului rigid. Structura metrică a unui spațiu euclidian este omogenă și izotropă, deci *independentă* de distribuția materiei în spațiu. De aici rezultă o completă relativitate a poziției sau a orientării în spațiu. Geometria euclidiană a fost larg acceptată drept cadru natural al descrierii proceselor mecanicii clasice, newtoniene.
- *Cinematica* se ocupă cu studiul mișcării corpurilor materiale. De aceea, ea este numită și geometria mișcării. Mișcarea cere definirea unui *reper* (*sistem de referință*) *spațio – temporal*, adică alegerea unui sistem de coordonate și a unui mod de măsurare a timpului.

Mecanica clasică presupune existența unui *spațiu euclidian absolut* și a unui *timp absolut*, ce este independent de structura spațiului. Deoarece spațiul euclidian este omogen și izotrop, nici o poziție sau orientare *nu* poate fi privilegiată, deci nici sistem de coordonate *nu* poate fi privilegiat. Pentru a măsura scurgerea timpului într-un punct dat putem folosi un fenomen periodic uniform. Practic, drept unitate de măsură a timpului este aleasă *ziua solară medie* (durata medie de timp scursă între două treceri consecutive ale Soarelui la meridianul unui punct de pe suprafața Pământului). Tradițional, acest meridian trece prin Greenwich, Anglia. *Secunda* reprezintă 1/86400 din ziua solară medie.

Pentru o informare completă asupra măsurării timpului, vezi *Anuarul Astronomic 2003* [15].

- *Dinamica* studiază mișcarea corpurilor materiale sub influența unor factori aflați în mediul înconjurător. O problemă fundamentală a dinamicii o reprezintă existența, în absența acestor factori, a unei stări naturale privilegiate, în cursul mișcării unui corp. Aristotel (384 – 322 î.e.n.) a presupus că există un reper, astfel încât starea naturală a oricărui corp ar fi starea de repaus față de acest reper. Mișcarea începea din repaus sub acțiunea „cauzelor eficiente” și era determinată de „cauzele finale”. O dată mișcarea inițiată, corpul avea tendința de a ajunge în starea naturală. Aristotel credea

că prezența mișcării este legată de acțiunea unei forțe, cu excepția corpurilor care se mișcă „prin ele însele”. În termeni moderni, legea de mișcare a lui Aristotel avea forma:

$$masa \times viteza = forța.$$

El nu a putut explica faptul că mișcarea continuă, chiar dacă sursa mișcării nu mai este în contact cu corpul. Noțiunea de *stare naturală* a apărut în Grecia Antică, ea fiind situată în centrul Pământului. Corpurile erau atrase spre centrul Pământului și se apropiau de el, dacă nu întâlneau în calea mișcării obstacole. Pământul era privit drept centrul Universului, planetele mișcându-se pe orbite circulare în jurul său.

Existența stării naturale a fost pusă la îndoială în Evul Mediu, când N. Copernic (1473 – 1543) a descoperit că planetele se mișcă în jurul Soarelui și nu în jurul Pământului. Pe de altă parte, este evident că existența unei stări naturale privilegiate este în contradicție cu caracterul omogen și izotrop al spațiului euclidian.

În concluzie, teoria aristotelică a reperului natural și legea de mișcare asociată s-au dovedit a fi eronate, ne-existând un reper unic, privilegiat, în care mișcarea să fie determinată de viteză.

- Primul pas spre edificarea unei baze științifice corecte a dinamicii a fost făcut de către Galileo Galilei (1564 – 1642), care a introdus conceptul de *acclerație*. Studiind căderea corpurilor, Galilei a ajuns la concluzia că ipoteza prin care orice mișcare este legată de acțiunea unei forțe, este falsă. Într-adevăr, o forță determină *variația vitezei*, iar pentru a păstra mișcarea rectilinie și uniformă a unui corp nu este necesară acțiunea vreunei forțe. Aceasta a fost ideea care l-a condus pe Galilei la formularea *legii inerției*.

Măsura tendinței unui corp de a se opune schimbării stării sale de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă definește conceptul de *masă (inerție)* a corpului. El a observat, de asemenea, că legile mișcării *nu* sunt afectate de mișcări rectilinii și uniforme. Deci, Galilei a dovedit faptul că *nu* există stări naturale privilegiate și viteze privilegiate ale reperelor alese.

În concluzie, G. Galilei a arătat că există *repere inerțiale*, în care corpurile rămân în repaus sau față de care se mișcă rectiliniu și uniform, în lipsa acțiunii forțelor exterioare. Reperele inerțiale însele se află în repaus sau în mișcare rectilinie și uniformă, unele față de altele. Proprietățile spațiului și ale timpului, ca și legile mecanicii, rămân invariante la o schimbare a reperelor inerțiale. Aceasta este esența *principiului relativității* al lui Galilei. Relațiile dintre mișcările unui corp, raportate la două repere inerțiale, sunt cunoscute sub numele de *transformări galileene*.

- Spre sfârșitul secolului XVII, Isaac Newton (1642 – 1727) a extins legile lui Galilei, formulând noi legi ale mișcării, ce vor deveni *principiile mecanicii newtoniene*. Prima dintre ele se referă la principiul relativității al lui Galilei, Newton extinzând valabilitatea acestui principiu de la cazul forței gravitaționale, propusă a fi constantă în vecinătatea suprafeței Pământului, la forțe variabile în spațiu și aplicând-o la mișcarea corpurilor cerești. În cercetările sale privind mecanica cerească, Newton a propus *legea atracției universale* drept bază a interpretării matematice a legilor

experimentale asupra mișcării planetelor descoperite de Johannes Kepler (1571 – 1630). Legile mecanicii newtoniene au forma cea mai simplă într-un reper inerțial, fiecare mișcare raportându-se la *spațiul absolut*. El a propus în acest rol un reper care are axele îndreptate spre „trei stele fixe”. Legile lui Newton sunt invariante de transformările galileene, dar ele își schimbă forma în cazul reperelor care se mișcă accelerat. În acest ultim caz, sunt introduse forțe „fictive”, cum ar fi forța centrifugă sau forța Coriolis, care se manifestă doar pentru un observator aflat într-un reper care se mișcă accelerat față de un reper inerțial. În concepția lui Newton *timpul* este *absolut* și curge independent de spațiu, el fiind același în două repere inerțiale. Forțele se propagă instantaneu și depind numai de pozițiile relative ale corpurilor. Deoarece timpul este același în toate reperele inerțiale, conceptul de *simultaneitate* este ușor de definit: dacă două evenimente au loc la același moment într-un reper inerțial, atunci ele sunt simultane în orice alt reper inerțial.

Bazele mecanicii clasice au fost clar exprimate de Sir Isaac Newton în celebra sa operă, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicată în 1686. Date suplimentare privind aspectele istorice ale dezvoltării mecanicii clasice pot fi găsite în lucrările [8] și [9].

### ***Principiul inerției. Grupul transformărilor galileene. Cinemática punctului***

- *Principiul inerției* (Galilei) afirmă că există sisteme de coordonate, numite *sisteme inerțiale*, care satisfac următoarele cerințe:
  - 1) Toate legile mecanicii sunt aceleași, la orice moment de timp, în raport cu toate sistemele inerțiale.
  - 2) Toate sistemele de coordonate ce se află în mișcare rectilinie și uniformă față de un sistem inerțial sunt inerțiale. Sistemele inerțiale pot fi fixate pe Pământ, Soare, diverse stele, ș.a.m.d., în funcție de problemele studiate.
- Fie  $M$  o mulțime de *puncte* (notate cu litere mari  $A, B, C, P, Q, R$ , ș.a.m.d.) și  $V$  un spațiu vectorial definit peste corpul de scalari  $K$ . Presupunem că este prescrisă o lege care asociază fiecărei *perechi ordonate de puncte* din  $M$  un vector din  $V$ . Astfel, punctelor  $P, Q \in M$  le facem să le corespundă vectorul  $\mathbf{x} \in V$  și scriem  $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{x}$ .  $P$  se numește *originea* vectorului  $\overrightarrow{PQ}$ , iar  $Q$  *extremitatea* sa. Mulțimea  $M$ , asociată spațiului vectorial  $V / K$ , definește un *spațiu afin*, dacă sunt îndeplinite următoarele axiome:
  - 1)  $\forall P \in M, \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \exists$  unic  $Q \in M$ , astfel ca  $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{x}$ .
  - 2) Dacă  $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{x}$  și  $\overrightarrow{QR} = \mathbf{y}$ , atunci  $\overrightarrow{PR} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ .

Prin definiție, dimensiunea spațiului afin  $M$  este egală cu dimensiunea spațiului vectorial  $V / K$ . Fie  $M$  un spațiu afin  $n$ -dimensional. Fixăm un punct  $O \in M$  și o bază  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$  în  $V / K$ . Ansamblul  $(O, \{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n})$  va fi numit *sistem de coordonate afine* în  $M$ .  $O$  este *originea* coordonatelor, iar  $\mathbf{e}_i, i = \overline{1, n}$ , sunt *vectorii bazei*.

Fie  $P \in M$  un punct arbitrar. Perechii ordonate de puncte  $(O, P)$  îi facem să corespundă vectorul  $\overrightarrow{OP}$ , numit *vector de poziție* al lui  $P$  față de  $O$ . Componentele vectorului de poziție  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$ , în baza  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ ,  $\{x_i\}_{1,n}$  se numesc *coordonaate afine* ale punctului  $P$  în raport cu sistemul de coordonate afine ales.

În fine, fie  $Q \in M$  un alt punct, având coordonatele afine  $\{y_i\}_{i=1,n}$  în raport cu același sistem de coordonate afine. Atunci, conform axiomei 2) de definire a spațiului afin, rezultă

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \mathbf{e}_i .$$

Coordonatele  $\{y_i - x_i\}_{i=1, n}$  se numesc *coordonate canonice (relative)* ale vectorului  $\overrightarrow{PQ}$ . Aspecte suplimentare asupra calcului vectorial și aplicațiilor sale în mecanică pot fi găsite în lucrările [5], [6] și [7].

- Fie  $\mathbf{R}$  mulțimea numerelor reale și  $\mathbf{R}^n$  un spațiu vectorial dimensional. După cum am văzut în paragraful anterior *spațiul afin n-dimensional*  $A^n$  se definește pe  $\mathbf{R}^n$  cu ajutorul grupului de translații:

$$a \rightarrow a + \mathbf{b} , \quad a \in A^n , \quad \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n , \quad a + \mathbf{b} \in A^n .$$

Cu alte cuvinte, diferența a două puncte ale spațiului afin  $A^n$  este un vector din spațiul vectorial  $\mathbf{R}^n$ .

Dacă pe spațiul vectorial  $\mathbf{R}^n$  introducem o formă biliniară, simetrică și pozitiv definită  $\langle , \rangle$  (numită *produs scalar*), spunem că am definit o *structură euclidiană*. Fie  $x, y \in A^n$ . Distanța dintre punctele  $x$  și  $y$  este dată de:

$$\rho_n(x, y) = \|x - y\|_n = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle_n} .$$

Spațiul afin  $A^n$ , înzestrat cu distanța  $\rho_n$ , se numește *spațiul euclidian n-dimensional* și se notează cu  $E^n$ .

- Structura spațio-temporală galileeană, specifică mecanicii clasice, cuprinde următoarele elemente esențiale:
  - 1) *Universul evenimentelor* (sau *continuumul spațio-temporal*) este un spațiu afin cvadridimensional  $A^4$ . Punctele lui  $A^4$  se numesc *evenimente*. Translațiile pe  $A^4$  generează spațiul vectorial  $\mathbf{R}^4$ .
  - 2) *Timpul* este o aplicație liniară  $t: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ , definită pe spațiul vectorial al translațiilor universului evenimentelor cu valori pe *axa temporală*  $\mathbf{R}$ . *Intervalul de timp* dintre evenimentul  $a \in A^4$  și evenimentul  $b \in A^4$  este numărul real  $t(b - a)$ . Dacă  $t(b - a) = 0$  evenimentele  $a$  și  $b$  se numesc *simultane*. Mulțimea evenimentelor simultane formează, în universul evenimentelor  $A^4$ , un subspațiu afin  $A^3$  numit *spațiul evenimentelor simultane*. Nucleul aplicației  $t$  este alcătuit din translațiile pe  $A^4$  care duc un eveniment arbitrar într-un eveniment simultan cu el. Prin urmare, nucleul funcției  $t$  va fi izomorf cu subspațiul vectorial  $\mathbf{R}^3$  al lui  $\mathbf{R}^4$ .

3) Distanța dintre două evenimente simultane  $a$  și  $b$  este definită de produsul scalar de pe  $\mathbf{R}^3$ :

$$\rho_3(a, b) = \|a - b\|_3 = \sqrt{\langle a - b, a - b \rangle_3} \quad , \quad \forall a, b \in A^3 .$$

Această distanță generează pe spațiul evenimentelor simultane  $A^3$  o structură euclidiană, notată  $E^3$ . Spațiul afin  $A^4$ , înzestrat cu structura spațio-temporală galileeană prezentată, este numit *spațiu galilean*.

Grupul tuturor transformărilor care păstrează structura galileeană (adică, toate transformările afine pe  $A^4$  care conservă intervalele de timp și distanțele dintre evenimentele simultane) este numit *grupul Galilei*. Elementele acestui grup se numesc *transformări galileene*.

- Fie  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$  produsul cartezian al axei temporale  $\mathbf{R}$  cu spațiul vectorial  $\mathbf{R}^3$  înzestrat cu o structură euclidiană fixată.  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$  posedă o structură galileeană naturală și va fi numit *spațiu aritmetic galilean*. El va reprezenta cadrul desfășurării proceselor mecanicii clasice. Pe acest spațiu vom defini trei exemple fundamentale ale transformării galileene:

- 1)  $g_1(t, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x} + \mathbf{v}t)$  ,  $\forall t \in \mathbf{R}$  ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  cu  $\mathbf{v} = \overrightarrow{\text{const.}}$  (*mișcare uniformă cu viteza  $\mathbf{v}$* );
- 2)  $g_2(t, \mathbf{x}) = (t + s, \mathbf{x} + \mathbf{y})$  ,  $\forall t \in \mathbf{R}$  ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  , cu  $s \in \mathbf{R}$  și  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$  date (*translația originii sistemului de coordonate*);
- 3)  $g_3(t, \mathbf{x}) = (t, G\mathbf{x})$  ,  $\forall t \in \mathbf{R}$  ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  , cu  $G: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  transformare ortogonală dată ( $GG^T = \mathbf{I}_3$ ) (*rotația axelor de coordonate*).

Fie mulțimea  $M \subset \mathbf{R}^4$ . Funcția bijectivă  $\varphi_1: M \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$  se numește *sistem galilean de coordonate* pe mulțimea  $M$ . Spunem că un sistem galilean de coordonate  $\varphi_2$  se deplasează uniform în raport cu sistemul  $\varphi_1$  dacă aplicația  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$  este o transformare galileeană. Sistemele galileene de coordonate  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  definesc pe  $M$  aceeași structură galileeană.

- Numim *mișcare* în  $\mathbf{R}^N$  a unui punct material o aplicație derivabilă  $\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbf{R}^N$ ,  $I \subset \mathbf{R}$ .  $N=1$  corespunde *mișcării rectilinii*,  $N=2$  *mișcării plane*, iar  $N=3$  *mișcării spațiale* a unui punct material. Imaginea aplicației  $\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbf{R}^N$  se numește *traectorie* în  $\mathbf{R}^N$ . În cele ce urmează, vom considera că toate funcțiile care intervin sunt suficient de regulate, în afara cazurilor în care se fac mențiuni speciale.

Definim vectorul *viteză* a unui punct material la momentul  $t_0 \in I$  prin derivata temporală a mișcării:

$$\mathbf{v}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{t=t_0}.$$

Viteza este un vector tangent la traiectorie la orice moment din timp.

Dimensiunea vitezei este  $LT^{-1}$  (L fiind simbolul pentru lungime, iar T cel pentru timp). Viteza se măsoară în SI în *metri/secundă* (m/s).

Definim vectorul *acelerație* a unui punct material la momentul  $t_0 \in I$  prin derivata a doua în raport cu timpul a mișcării:

$$\mathbf{a}(t_0) = \ddot{\mathbf{x}}(t_0) = \left. \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right|_{t=t_0}.$$

Dimensiunea accelerației este  $LT^{-2}$ . Ea se măsoară în SI în  $m/s^2$ .

- Vom considera mișcarea unui *sistem mecanic de n puncte materiale*, în spațiul euclidian tridimensional. Într-un sistem galilean de coordonate fixat, mișcarea acestui sistem este dată de  $n$  aplicații  $\mathbf{x}_i : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Presupunem că graficele mișcării punctelor  $\Gamma_i = \{(t, \mathbf{x}_i(t)) / t \in I\}$  și  $\Gamma_j = \{(t, \mathbf{x}_j(t)) / t \in I\}$  sunt disjuncte, pentru  $\forall i \neq j$ . Astfel, evităm „coliziunile” dintre punctele materiale ale sistemului. Numim *spațiul configurațiilor* sistemului de  $n$  puncte materiale spațiul  $\underbrace{\mathbf{R}^3 \times \dots \times \mathbf{R}^3}_{n \text{ ori}}$ .

Aplicațiile  $\mathbf{x}_i, i = \overline{1, n}$  generează o funcție  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbf{R}^N, N = 3n$ , definită pe axa temporală cu valori în spațiul configurațiilor. Această funcție definește *mișcarea unui sistem de n puncte materiale*.

- Exerciții și probleme:**

- Să se arate că funcțiile  $g_1, g_2, g_3$  care definesc mișcarea uniformă, translația originii și rotația axelor de coordonate sunt transformări galileene.
- Să se demonstreze că orice transformare galileană  $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$  poate fi reprezentată în mod unic drept compunerea unei rotații, cu o translație și o mișcare uniformă ( $g = g_1 \circ g_2 \circ g_3$ ).
- Toate spațiile galileene sunt izomorfe între ele (adică, există o transformare bijectivă ce conservă structura galileană). În particular, toate spațiile galileene sunt izomorfe cu spațiul aritmetic galilean  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ .



- 4) În cazul mișcării plane a unui punct material să se determine componentele vitezei și ale accelerației în raport cu un sistem de coordonate polare.
- 5) În cazul mișcării spațiale a unui punct material să se determine componentele vitezei în raport cu un sistem de coordonate sferice.
- 6) În cazul mișcării spațiale a unui punct material să se afle componentele vitezei și ale accelerației în raport cu triedrul Frenet asociat traiectoriei.
- 7) Să se studieze mișcarea unui punct material aflat pe un cerc de rază  $R$ , care se rostogolește fără să alunece, în plan vertical, pe o dreaptă dată, aflată în același plan vertical, știind că centrul cercului se deplasează uniform cu viteza  $v_0$ , paralelă cu dreapta.
- 8) Un punct material se deplasează uniform pe o elice circulară de pas  $h$  și rază  $R$ . Să se afle viteza și accelerația punctului.

### *Masă, forță, momentul unei forțe*

- Fie  $M$  un sistem material continuu sau discret. Lui îi asociem numărul real  $m(M)$ , numit *masa sistemului*, care are următoarele proprietăți (vezi [6]):

- 1)  $m(M) \geq 0$ ,  $\forall M \in \mathcal{P}(M)$  ;
- 2)  $\frac{dm}{dt} = 0$ , masa sistemului rămâne *constantă* în timpul mișcării;
- 3)  $\forall M_1, \dots, M_n$  o partiție a lui  $M$  avem  $m(M) = \sum_{i=1}^n m(M_i)$ .

Proprietățile 1) și 3) ne arată că masa este o măsură pozitivă pe mulțimea părților sistemului  $M$ . Prin urmare, avem reprezentarea:

$$m(M) = \int_M dm,$$

unde integrala se face pe *varietatea materială*  $M$ . Aici și în cele ce urmează, integrala pe  $M$  va fi înlocuită cu o sumă, dacă sistemul  $M$  este discret.

În plus, dacă presupunem că măsura  $m$  este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue  $\mu$  pe  $V$ , varietatea geometrică asociată varietății materiale  $M$ , atunci rezultă că există o funcție unică  $\rho$ , numită *masă specifică* (sau *masa unității de volum*), astfel încât:

$$(3.1) \quad m(M) = \int_V \rho d\mu.$$

Elementele fundamentale privind teoria măsurii, necesare în acest capitol, pot fi găsite în monografia [14].

- \* În mecanica clasică sunt utilizate varietăți materiale ideale, cum ar fi: *puncte materiale*, *curbe materiale* și *suprafețe materiale*. În primul caz, ele pot modela mișcarea electronilor într-un atom, al atomilor într-o moleculă, a planetelor în sistemul solar. În cel de-al doilea caz, ele sunt utilizate în descrierea comportamentului firelor subțiri, iar în ultimul caz, al plăcilor subțiri.

În cele ce urmează, vom prezenta definirea riguroasă a masei unui sistem discret alcătuit din  $n$  puncte materiale. În acest caz, varietatea geometrică corespunzătoare are măsură Lebesgue nulă. Prin urmare, formula de reprezentare (3.1) nu mai are loc, în sens clasic. De aceea, masa specifică va fi definită cu ajutorul distribuției Dirac. Astfel, fie  $m_0 > 0$  masa concentrată în punctul  $\mathbf{x}_0$ , presupusă a fi constantă în timp. Atunci, masa specifică va fi definită în tot spațiul  $\mathbf{R}^3$ , prin formula:

$$\rho = m_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) .$$

Din (3.1) și proprietățile distribuției Dirac (vezi [17]), rezultă:

$$\int_{\mathbf{R}^3} m_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mu = m_0 \int_{\mathbf{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mu = m_0 .$$

În cazul unui sistem de  $n$  puncte materiale  $\mathbf{x}_i$ , având masele  $m_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , constante în timp, vom defini masa specifică a sistemului material discret prin relația:

$$\rho = \sum_{i=1}^n m_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) .$$

Atunci, masa totală a sistemului va rezulta sub forma:

$$m = \int_{\mathbf{R}^3} \rho d\mu = \sum_{i=1}^n m_i \int_{\mathbf{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mu = \sum_{i=1}^n m_i .$$

Această formulă este în acord cu axioma a treia a masei.

- *Centrul de masă  $G$*  al unui sistem material  $M$  este definit de egalitatea:

$$\int_M \overrightarrow{GP} dm = 0 , \quad \forall P \in M .$$

Fixând originea  $O$  a unui reper cartezian, din relația  $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}$ , obținem vectorul de poziție al centrului de masă, sub forma:

$$(3.2) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_M \overrightarrow{OP} dm , \quad \forall P \in M .$$

Notând  $\overrightarrow{OG} = \xi$  și  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x}$ , vom obține coordonatele centrului de masă  $G$ , în reperul cartezian cu originea în  $O$ , sub forma:

$$\xi_i = \frac{1}{m} \int_M x_i dm , \quad i = 1, 2, 3 .$$

Centrul de masă  $G$  este unicul punct cu această proprietate. Este evident că dacă  $G'$  este un alt centru de masă al sistemului  $M$ , din (3.2) rezultă:

$$m(\overrightarrow{OG'} - \overrightarrow{OG}) = 0.$$

Deci,  $G \equiv G'$ .

- A doua mărime fundamentală a dinamicii este *forța*. Dacă masa era legată de distribuția materiei în spațiu, forța exprimă interacțiunea dintre corpuri. Originea forțelor este diversă, ea putând fi de natură electrică, magnetică, gravitațională, moleculară, etc. Forța poate fi continuă sau discontinuă și poate acționa prin contact sau la distanță. În mecanica newtoniană ea este legată de variația vitezei, adică de *acclerație*.

O ipoteză fundamentală a mecanicii clasice se referă la faptul că *forța se propagă instantaneu de la sursă la corp*. Această ipoteză este intrinsec legată de conceptul de timp absolut, experiențele arătând că în natură forțele se propagă din aproape în aproape și *nu* instantaneu.

Conform principiilor determinismului și al acțiunii forțelor, care vor fi prezentate în capitolul următor, o forță va fi modelată ca drept o funcție  $\mathbf{F}: \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^N$ , unde  $\mathbf{R}^N, N = 3n$  este spațiul configurațiilor asociat mișcării sistemului material discret. Forța  $\mathbf{F}$  va trebui să satisfacă ecuația de mișcare a lui Newton:

$$(3.3) \quad m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t).$$

Având în vedere necesitatea invarianței forței la transformări galileene, obținem următoarele restricții asupra funcției  $\mathbf{F}$ :

- 1) Deoarece translația pe axa temporală este o transformare galileeană, rezultă că *forța nu depinde explicit de timp*, într-un reper inerțial. Astfel, ecuația fundamentală (3.3) va avea forma:

$$(3.4) \quad m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

- 2) Deoarece translațiile spațiale sunt transformări galileene, rezultă că *forța depinde doar de coordonatele relative* ale punctelor sistemului material. Astfel, dacă  $\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\varphi}_i(t), i = \overline{1, n}$  reprezintă mișcarea sistemului material discret  $M$  (deci, soluții ale

sistemului (3.4)), atunci și  $\mathbf{x}_i + \mathbf{r}, i = \overline{1, n}, \forall \mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$  cu  $\dot{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\text{const.}}$ , verifică ecuația lui Newton (3.4).

- 3) Deoarece rotațiile în  $\mathbf{R}^3$  sunt transformări galileene, rezultă că forța  $\mathbf{F}$  trebuie să satisfacă egalitatea:

$$\mathbf{F}(G\mathbf{x}, G\dot{\mathbf{x}}) = G\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \forall G \in \text{Ort}(\mathbf{R}^3).$$

Aici  $\text{Ort}(\mathbf{R}^3)$  reprezintă mulțimea transformărilor ortogonale pe  $\mathbf{R}^3$ .

Proprietatea 3) ne arată că forța este un *vector izotrop*.

- Fixat fiind punctul  $O$ , definim *momentul forței  $\mathbf{F}$  în raport cu polul  $O$*  prin vectorul  $\mathbf{M}_O$ , dat de relația:

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{F},$$

unde  $P$  este punctul de aplicație al forței  $\mathbf{F}$ .

Dacă vom schimba polul momentului din  $O$  în  $O'$ , rezultă:

$$\mathbf{M}_{O'} = \overrightarrow{O'P} \times \mathbf{F} = \left( \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} \right) \times \mathbf{F} = \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}_O.$$

Prin urmare, momentul unei forțe este un „vector legat”, el depinzând de polul  $O$ . În schimb, scalarul  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_O$  este invariabil de schimbarea polului. Într-adevăr, avem relația:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{F} \cdot \left( \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{F} \right) + \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_O.$$

Cuplul  $(\mathbf{F}, \mathbf{M}_O)$  formează *torsorul* forței  $\mathbf{F}$  în raport cu polul  $O$ .  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_O$  reprezintă *scalarul torsorului*.

Fie  $\delta$  o axă de versor  $\mathbf{u}$ ,  $O, O' \in \delta$ . Din formula de schimbare a polului rezultă:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{u} \cdot \left( \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{F} \right) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_O.$$

Rezultă că scalarul  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_O$  este independent de alegerea polului momentului pe axa  $\delta$ . Prin urmare, scalarul  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_O$  definește *momentul forței față de axa  $\delta$* .

În acest paragraf am notat cu „ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ” produsul vectorial și cu „ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ” produsul scalar a doi vectori. Pentru elemente suplimentare privind calculul vectorial și aplicațiile sale în mecanică, vezi lucrările [5], [6] și [7].

- Să considerăm acum sistemul material  $M$ , supus forțelor  $\mathbf{F}_i$ , aplicate în punctele  $P_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Definim *rezultanta* sistemului de forțe  $\{\mathbf{F}_i\}_{i=\overline{1, n}}$  prin vectorul:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i,$$

respectiv, *momentul resultant* al sistemului de forțe  $\{\mathbf{F}_i\}_{i=\overline{1, n}}$  în raport cu polul  $O$ , prin vectorul:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OP_i} \times \mathbf{F}_i.$$

Cuplul  $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O)$  definește *torsorul* sistemului de forțe  $\{\mathbf{F}_i\}_{i=\overline{1, n}}$  în raport cu polul  $O$ . Schimbând polul din  $O$  în  $O'$ , rezultă:

$$\mathbf{M}_{O'} = \sum_{i=1}^n \left( \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i} \right) \times \mathbf{F}_i = \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}_O .$$

De aici, obținem:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{R} \cdot \left( \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R} \right) + \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O .$$

Deci, *scalarul torsorului*  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O$  este invariabil de schimbarea polului.

• **Exerciții și probleme:**

- 1) Centrul de masă al unui sistem material se află în interiorul oricărei suprafețe convexe care conține în aceeași zonă a spațiului sistemul de puncte materiale.
- 2) Dacă punctele unui sistem material se află pe o dreaptă sau într-un plan, atunci centrul de masă al sistemului se află pe acea dreaptă, respectiv în acel plan.
- 3) Dacă sistemul material admite o varietate de simetrie (punct, axă sau plan) atunci centrul de masă al sistemului se află pe acea varietate de simetrie.
- 4) Dacă sistemul material  $M$  admite o partiție  $\{M_i\}_{i=1, \overline{n}}$ , fiecare subsistem  $M_i$  având masa  $m_i$  și centrul de masă  $G_i$ , atunci centrul de masă al sistemului  $G$  va avea vectorul de poziție  $\overrightarrow{OG}$ , dat de relația:

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n (m_i \overrightarrow{OG_i}) .$$

- 5) Dacă sistemul material  $M = M_1 \setminus M_2$ , reprezintă diferența sistemelor  $M_1$  și  $M_2$ , de mase  $m_1$  și  $m_2$  și centre de masă  $G_1$  și  $G_2$ , atunci centrul de masă al sistemului  $G$  va avea vectorul de poziție  $\overrightarrow{OG}$ , dat de relația:

$$(m_1 - m_2) \overrightarrow{OG} = m_1 \overrightarrow{OG_1} - m_2 \overrightarrow{OG_2} .$$

- 6) Fie  $M$  un sistem material supus sistemului de forțe  $\{\mathbf{F}_i\}_{i=1, \overline{n}}$ .

Presupunem că rezultanta  $\mathbf{R} \neq 0$ . Să se arate că locul geometric al punctelor  $P$  pentru care rezultanta  $\mathbf{R}$  și momentul resultant  $\mathbf{M}_P$  sunt colineare este o dreaptă, numită *axa centrală a sistemului*.

- 7) Să se definească și să se studieze proprietățile produsului scalar a doi vectori.
- 8) Să se definească și să se studieze proprietățile produsului vectorial a doi vectori.

- 9) Să se definească și să se studieze proprietățile produsului mixt a trei vectori.
- 10) Să se definească și să se obțină formulele de reprezentare ale dublului produs vectorial a trei vectori.

### *Principiile mecanicii newtoniene*

- Alături de principiul inerției, pe care l-am descris în capitolul 2, în acest capitol vom prezenta și vom analiza celelalte principii care stau la baza mecanicii clasice.

#### 1) *Principiul determinismului* (Newton – Laplace)

G. Galilei a fost primul care a observat că *starea* unui punct la un moment dat este determinată de *poziția* și *viteza* sa. Vom nota cu  $t_0$  momentul inițial al mișcării.

*Principiul determinismului afirmă că starea inițială a unui sistem mecanic determină, în mod unic, mișcarea sa, la orice moment din timp.*

Astfel, pentru un moment  $t$  apropiat de  $t_0$ , presupunem că avem dezvoltarea tayloriană:

$$x_i(t) = x_i(t_0) + (t - t_0)\dot{x}_i(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\ddot{x}_i(t_0 + \varepsilon_i t), \quad i = 1, 2, 3 \quad .$$

De aici, rezultă că, dacă starea inițială  $(\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0))$  este dată, pentru a determina mișcarea trebuie să aflăm accelerația. Prin urmare, intuim că avem nevoie de o relație între forță și accelerație. Această relație este dată de următorul principiu.

#### 2) *Principiul acțiunii forțelor* (Newton)

*Variația mișcării este proporțională cu forța motoare imprimată și este coliniară cu ea.*

Acest principiu, numit și *legea a doua a lui Newton*, la fel ca și celelalte principii ale mecanicii clasice, a fost enunțat de Isaac Newton în celebra sa carte *Principia Mathematica* (1687). Expresia ei matematică este:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad ,$$

sau

$$(4.1) \quad m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad .$$

Această formă a legii a doua a lui Newton a fost dată de Mac Laurin (1742) și de L. Euler (1748).



În cadrul mecanicii clasice, o formă echivalentă a lui (4.1), având în vedere axioma constanței masei în timpul mișcării, este:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}},$$

unde  $\mathbf{p}$  este vectorul *impuls*. Dimensiunea fizică a forței este  $\text{MLT}^{-2}$  (unde M este simbolul masei), iar unitatea sa de măsură în SI este *newtonul* N (un newton este forța necesară pentru a imprima unei mase de 1 kg. o accelerație de  $1\text{m/s}^2$ ).

### 3) Principiul acțiunii și al reacțiunii (Newton)

*Acțiunile reciproce a două corpuri sunt întotdeauna coliniare, egale și dirijate în sens contrar.*

Fie  $P_1$  și  $P_2$  două puncte materiale aflate în interacțiune. Dacă vom nota cu  $\mathbf{F}_{12}$  forța cu care punctul  $P_2$  acționează asupra punctului  $P_1$  și cu  $\mathbf{F}_{21}$  forța cu care punctul  $P_1$  acționează asupra punctului  $P_2$ , atunci acest principiu va avea forma matematică:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad \mathbf{F}_{12} \parallel \overrightarrow{P_1 P_2}.$$

- Pentru a determina mișcarea, vom proiecta ecuația lui Newton (4.1.) pe un reper cartezian:

$$m\ddot{x}_i = F_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad i=1,2,3.$$

Vom obține un sistem de trei ecuații diferențiale de ordinul doi, cu trei necunoscute  $x_i$ , în general neliniar. Urmând procedeul standard, folosind substituțiile:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ F_1 / m \\ F_2 / m \\ F_3 / m \end{bmatrix},$$

acest sistem de ordin doi se va reduce la un sistem diferențial de ordinul întâi, având șase ecuații cu șase necunoscute, scris sub forma normală:

$$(4.2) \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}).$$

Sistemul (4.2) se numește *sistem dinamic autonom*. Pentru determinarea mișcării, sistemului (4.2) îi vom asocia *condițiile inițiale*:

$$(4.3) \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0, \quad \begin{cases} x_i(t_0) = x_i^0 \\ \dot{x}_i(t_0) = \dot{x}_i^0 \end{cases}.$$

Astfel, am obținut *problema Cauchy* (4.2), (4.3). Dacă funcțiile  $Q_i$  (deci componentele forței  $F_i$ ) sunt Lipschitz continue pe domeniul de definiție, atunci soluția problemei Cauchy (4.2), (4.3) există și este unică (vezi [4]). În acest caz soluția va depinde de datele inițiale sub forma:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}^0) .$$

Asupra studiului calitativ al ecuației lui Newton, în caz unidimensional, vom reveni pe larg, într-un capitol separat.

- Condițiile de regularitate care asigură existența și unicitate soluției problemei Cauchy (4.2.), (4.3), determină dependența sa continuă de datele inițiale pe un interval finit de timp. Dacă vom pune problema dependenței soluției de datele inițiale pe un interval infinit de timp, atunci va trebui să studiem *stabilitatea soluției* problemei Cauchy considerate (vezi [4], cap. 4).

Fie  $\bar{\mathbf{f}}$  soluția problemei Cauchy (4.2), (4.3) corespunzătoare datelor inițiale  $\bar{\mathbf{q}}^0$  și  $\mathbf{f}$  soluția aceleiași probleme pentru datele inițiale  $\mathbf{q}^0$ . Soluția  $\bar{\mathbf{f}}$  se numește *stabilă* (în raport cu soluția  $\mathbf{f}$ ) dacă oricărui  $\varepsilon > 0$  îi corespunde un  $\eta_\varepsilon > 0$  cu proprietatea :

$$\left| \mathbf{q}^0 - \bar{\mathbf{q}}^0 \right| < \eta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}} \right| < \varepsilon \quad , \quad \forall t > t_0 .$$

Soluția  $\bar{\mathbf{f}}$  se numește *asimptotic stabilă* (în raport cu soluția  $\mathbf{f}$ ), dacă :

$$\left| \mathbf{q}^0 - \bar{\mathbf{q}}^0 \right| < \eta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}} \right| = 0 .$$

- O poziție  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  este *poziție de echilibru* a traiectoriei punctului material, dacă lăsând punctul în această poziție cu viteză inițială nulă, el va rămâne tot timpul în această poziție. Putem scrie matematic această definiție, sub forma:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{a}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{a}, \quad \forall t > t_0 .$$

Soluția  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  verifică ecuația de mișcare (4.1), dacă:

$$(4.4) \quad \mathbf{F}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{0} \quad , \quad \forall t > t_0 .$$

Din teorema de unicitate a soluției problemei Cauchy (4.2), (4.3), rezultă că relația (4.4) este o condiție suficientă de echilibru. Prin urmare, condiția necesară și suficientă ca un punct material să se afle în echilibru în poziția  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  este ca rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului să fie nulă. Ecuația (4.4) ne furnizează trei ecuații scalare pentru determinarea componentelor vectorului  $\mathbf{a}$ .

O poziție de echilibru  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  este stabilă dacă oricare ar fi  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ , să existe  $\eta_\varepsilon, \eta_{\varepsilon'}' > 0$ , astfel ca:

$$|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{a}| < \eta_\varepsilon \quad \text{și} \quad |\dot{\mathbf{x}}(t_0)| < \eta_{\varepsilon'}'$$

să implice

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon \quad \text{și} \quad |\dot{\mathbf{x}}(t)| < \varepsilon', \quad \forall t > t_0.$$

Cu alte cuvinte, poziția  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  este stabilă dacă, „lansând” punctul material dintr-o vecinătate a ei cu viteză suficient de mică, el va rămâne în „apropierea” poziției  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ , iar viteza sa nu va crește „prea mult”.

• **Exerciții și probleme:**

- 1) Să se studieze mișcarea pe direcția verticală a unui punct material greu, aflat în vid, descrisă de următoarea problemă Cauchy:

$$\ddot{x} = -g, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

- 2) Să se studieze mișcarea în plan vertical a unui punct material greu, aflat în vid, descrisă de următoarea problemă Cauchy:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0.$$

- 3) Să se studieze mișcarea în plan vertical a unui punct material greu, aflat în mediu rezistent, descrisă de următoarea problemă Cauchy:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g} - g\varphi(v)\frac{\mathbf{v}}{v}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0,$$

unde  $g = |\mathbf{g}| = 9,81 \text{ m/s}^2$  este modulul accelerației gravitaționale,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ ,  $v = |\mathbf{v}|$ , iar  $\varphi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  este o funcție monoton crescătoare cu  $\varphi(0) = 0$ ,  $\lim_{v \rightarrow \infty} \varphi(v) = +\infty$ .

- 4) Să se studieze mișcarea rectilinie a unui punct material de masă  $m$ , aflat sub acțiunea unei forțe elastice de modul  $k > 0$ , descrisă de problema Cauchy:

$$m \ddot{x} = -kx \quad , \quad x(0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad .$$

- 5) Să se studieze mișcarea rectilinie a unui punct material de masă  $m$ , aflat sub acțiunea unei forțe elastice de modul  $k > 0$  și a unei forțe de frecare proporționale cu viteza, descrisă de problema Cauchy:

$$m \ddot{x} = -kx - m\lambda^2 \dot{x} \quad , \quad x(0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbf{R} .$$

- 6) În cazul problemei *oscilatorului liniar*, descrisă de exercițiul 4), să se arate că punctul  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ , este o poziție de echilibru stabilă.

## Capitolul 5

---

### *Dinamica punctului material. Forțe conservative*

- În acest capitol vom studia principalele mărimi mecanice care definesc mișcarea unui punct material. În final, vom introduce o clasă specială, importantă, de forțe: *forțele conservative*.

Fie  $P$  un punct material de masă  $m$ , având vectorul de poziție  $\mathbf{x}(t)$ .

După cum am văzut, definim vectorul *impuls* al punctului  $P$  prin egalitatea:

$$\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{x}}(t).$$

Dimensiunea fizică a impulsului este  $MLT^{-1}$ .

Fiind dat un punct  $O$ , drept originea reperului inerțial la care se raportează mișcarea, vom defini *momentul cinetic* al punctului material  $P$  în raport cu polul  $O$  a fi vectorul:

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{x} \times (m \dot{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{x} = \overrightarrow{OP}.$$

Este evident că momentul cinetic reprezintă momentul impulsului față de polul  $O$ . Dimensiunea sa fizică este  $ML^2T^{-1}$ .

A treia mărime fundamentală a dinamicii punctului material este *energia cinetică*. Definim energia cinetică a unui punct material  $P$  a fi scalarul, dat de relația:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2.$$

Dimensiunea sa fizică este  $ML^2T^{-2}$ .

În fine, definim *lucrul mecanic* efectuat de o forță  $\mathbf{F}$ , care deplasează punctul material  $P$ , având vectorul de poziție  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ , de-a lungul unei curbe date, între punctele  $A$  și  $B$ , a fi scalarul definit de integrala curbilinie:

$$L_{AB} = \int_{\hat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

Mărimea scalară  $dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$  se numește *lucru mecanic elementar*, iar scalarul:

$$P = \frac{dL}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

definește *puterea mecanică*.

Dimensiunea fizică a lucrului mecanic este  $ML^2 T^{-2}$ , iar unitatea sa de măsură se numește *joule* (simbolul  $J$ ). 1 joule reprezintă lucrul mecanic efectuat de o forță de 1 newton la o deplasare de 1 metru.

Dimensiunea fizică a puterii mecanice este  $ML^2 T^{-3}$ , unitatea sa de măsură fiind *watt*-ul (simbol  $W$ ). 1 watt reprezintă puterea necesară efectuării unui lucru mecanic de 1 joule într-o secundă.

- Un câmp de forțe  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  se numește *conservativ* (*potențial*) dacă există un câmp scalar  $\Pi(\mathbf{x})$  astfel încât:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \text{grad} \Pi(\mathbf{x}).$$

În acest caz, lucrul mecanic efectuat de forța  $\mathbf{F}$  între punctele  $A$  și  $B$  nu depinde de drumul  $\widehat{AB}$ , ci numai de capetele lui:

$$L_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\widehat{AB}} \text{grad} \Pi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\widehat{AB}} d\Pi(\mathbf{x}) = \Pi(B) - \Pi(A).$$

Reciproc, dacă vom presupune că lucrul mecanic nu depinde de drumul parcurs (adică, este o *funcție de stare*), atunci putem defini potențialul  $\Pi(\mathbf{x})$  al forței  $\mathbf{F}$ , prin formula:

$$(5.1) \quad \Pi(\mathbf{x}) = \int_{\widehat{\mathbf{x}_0 \mathbf{x}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x},$$

unde  $\mathbf{x}_0$  este vectorul de poziție al punctului inițial, iar  $\mathbf{x}(t)$  este vectorul de poziție al punctului curent. Se obține ușor relația:

$$(5.2) \quad \text{grad} \Pi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

În concluzie, un câmp de forțe este conservativ dacă și numai dacă lucrul mecanic este o funcție de stare.

Dacă drumul este închis ( $A=B$ ), este evident că rezultatul precedent se reduce la condiția

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \Pi(B) - \Pi(A) = 0 ,$$

unde  $\gamma$  este un drum închis, care conține punctul  $A$ . Din teorema lui Stokes rezultă că relația precedentă este echivalentă cu

$$\text{rot } \mathbf{F} = 0 ,$$

adică  $\mathbf{F}$  este un câmp irotațional de forțe. Acest rezultat este valabil pentru un domeniu simplu conex și pentru un câmp de forțe regulat ( $\mathbf{F} \in [C^1(\mathbf{R})]^3$  și  $\Pi \in C^2(\mathbf{R})$ ), vezi [12]. Pentru definirea operatorilor gradient și rotor, ca și pentru proprietățile lor, pot fi consultate lucrările [5] și [6].

• În final vom da câteva exemple de forțe conservative.

- 1) Primul exemplu de forță conservativă este *greutatea* unui punct material de masă  $m$ ,  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ . În raport cu un reper cartezian, care are axa  $Oz$  orientată după verticala ascendentă,  $\mathbf{G} = -mg\mathbf{k}$ , unde  $g$  este accelerația gravitațională, presupusă a fi constantă, iar  $\mathbf{k}$  este versorul axei  $Oz$ . În acest caz potențialul forței gravitaționale va avea forma:

$$\Pi = -mgz + C$$

unde  $C$  este o constantă scalară arbitrară.

- 2) Al doilea exemplu de forță conservativă se referă la *forțele centrale*. Definim o forță centrală în raport cu punctul  $O$ , a fi un vector invariant la grupul mișcărilor plane ce lasă fix punctul  $O$ . Din această definiție se vede ușor că dreapta suport a unei forțe centrale trece prin  $O$  și că modulul forței depinde doar de distanța de la punctul ei de aplicație la punctul  $O$ . În concluzie, expresia matematică a unei forțe centrale este:

$$(5.3) \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = F(r) \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad \mathbf{x} = \overrightarrow{OP}, \quad r = |\mathbf{x}|.$$

Dacă  $F(r) < 0$  forța centrală se numește *atractivă*, iar dacă  $F(r) > 0$  forța centrală se numește *repulsivă*. Din formula (5.3) rezultă ușor că  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ , deci *forțele centrale sunt conservative*.

Cel mai simplu exemplu de forță centrală este cel al *forței elastice*. În acest caz  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -k\mathbf{x}$ , unde  $k = \text{const.} > 0$  se numește *modul de elasticitate*. Această expresie a forței elastice se bazează pe experimentele unidimensionale (*legea Hooke*).

Potențialul forței elastice are forma:

$$(5.4) \quad \Pi(\mathbf{x}) = -\frac{k}{2} \sum_{i=1}^3 x_i^2 + C \quad ,$$

unde  $x_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , sunt componentele carteziane ale vectorului  $\mathbf{x}$ .

Cel mai celebru exemplu de forță centrală este *forța de atracție universală*  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -f \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}$ , care, în particular, reprezintă forța de atracție pe care Soarele (de masă  $M$ ) o exercită asupra unei planete (de masă  $m$ ), aflată la distanța  $r$ . Constanta  $f$  (*constanta atracției universale*) este determinată experimental și are valoarea  $f = 6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \times \text{s}^2)$ . Potențialul forței de atracție universală are forma:

$$(5.5) \quad \Pi(\mathbf{x}) = f \frac{mM}{r} + C \quad .$$

• **Exerciții și probleme:**

- 1) Din (5.1) să se obțină relația (5.2).
- 2) În cazul forțelor centrale (5.3), să se arate că ele sunt irotaționale.
- 3) Să se deducă potențialul forței elastice sub forma (5.4).
- 4) Să se deducă potențialul forței de atracție universală sub forma (5.5).



### *Teoremele generale ale mișcării punctului material*

- În acest capitol vom obține din principiile mecanicii newtoniene, cu ajutorul mărimilor fundamentale introduse în capitolul precedent, teoremele generale ale dinamicii punctului material. Pentru fiecare dintre ele vom analiza consecințele cele mai importante.

#### ***Teorema 6.1 (teorema impulsului)***

*Mișcarea unui punct material are loc astfel încât derivata temporală a impulsului este egală cu forța rezultantă aplicată punctului:*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} .$$

#### ***Demonstrație:***

Pornind de la principiul acțiunii forțelor  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ , având în vedere definirea impulsului  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$  și ținând cont de axioma constanței masei în timpul mișcării  $\dot{m} = 0$ , rezultă că  $\dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$  ■

Dacă, în particular,  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , din teorema impulsului rezultă  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ , deci  $\dot{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\text{const.}}$ . Prin urmare, dacă forța rezultantă ce acționează asupra punctului este nulă, punctul se mișcă rectiliniu și uniform. Astfel, regăsim principiul inerției, într-un caz particular ( $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ).

Pe de altă parte, este bine să remarcăm că principiul inerției *nu* este o consecință a teoremei impulsului, el acționând pe o clasă mult mai generală de mișcări (ale mecanicii clasice și ale teoriei restrânse a relativității).

#### ***Teorema 6.2 (teorema momentului cinetic)***

*Mișcarea unui punct material are loc astfel încât derivata temporală a momentului cinetic este egală cu momentul forței rezultante aplicate:*

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O = \mathbf{x} \times \mathbf{F} .$$

#### ***Demonstrație:***

Din principiul acțiunii forțelor  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ , înmulțind vectorial cu  $\mathbf{x}$ , rezultă  $\mathbf{x} \times m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$  .

De aici, rezultă ușor că  $\mathbf{x} \times m\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{K}}_O$  .

Deci,  $\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{x} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_O$  ■

- În continuare vom prezenta două cazuri particulare importante și consecințele teoremei momentului cinetic în aceste cazuri.

1) Fie  $\mathbf{F}$  o *forță centrală*, al cărei suport trece prin polul  $O$ . Rezultă că  $\mathbf{M}_O = \mathbf{x} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ .

Prin urmare, din *teorema momentului cinetic* rezultă  $\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{0}$ , deci  $\mathbf{K}_O = \overrightarrow{\text{const.}}$ .  
Astfel, obținem o *integrală primă* vectorială a mișcării ( numită *integrala primă a momentului cinetic* ):

$$(6.1) \quad \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 \times \dot{\mathbf{x}}_0 = \overrightarrow{\text{const.}}$$

Dacă  $\mathbf{x}_0$  și  $\dot{\mathbf{x}}_0$  au *suporturile paralele*, atunci produsul lor vectorial este nul. Din (6.1) rezultă că  $\mathbf{x}(t)$  și  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  vor avea suporturile paralele, pentru orice moment de timp  $t$ . Prin urmare, în acest caz mișcarea va fi *rectilinie*.

În general,  $\mathbf{x}_0$  și  $\dot{\mathbf{x}}_0$  *nu* au suporturile paralele, deci ei formează un plan. Vom arăta că mișcarea se va face în acest plan. Într-adevăr, folosind integrala primă (6.1) și notând cu  $\mathbf{k}$  versorul normalei la planul  $(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$ , rezultă că  $(\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) \times \mathbf{k} = (\mathbf{x}_0 \times \dot{\mathbf{x}}_0) \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ . Deci,  $\mathbf{k}$  va fi normal pe planul mișcării  $(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$ ,  $\forall t$ .

În acest plan al mișcării vom introduce coordonatele polare  $(r, \theta)$  ale punctului material  $P$ . Notând cu  $\Delta A$  aria „măturată” de raza vectoare în intervalul de timp  $\Delta t$ , vom defini *viteza areolară*  $\dot{A}$  a punctului  $P$ , prin relația:

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}.$$

Ținând cont de estimările geometrice evidente:

$$\frac{r^2 \Delta \theta}{2} \leq \Delta A \leq \frac{(r + \Delta r)^2 \Delta \theta}{2}, \quad r = |\mathbf{x}|$$

rezultă

$$\frac{r^2 \Delta \theta}{2 \Delta t} \leq \frac{\Delta A}{\Delta t} \leq \frac{(r + \Delta r)^2 \Delta \theta}{2 \Delta t}.$$

De aici, trecând la limită cu  $\Delta t \rightarrow 0$ , obținem:

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2}.$$

Pe de altă parte, dacă vom calcula, în coordonate polare, scalarul:

$$\frac{1}{2} |\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}| = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2}$$

rezultă expresia vitezei areolare, sub forma:

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}| .$$

Folosind integrala primă a momentului cinetic, rezultă că mișcarea se face în acest caz cu viteză areolară constantă. Dacă vom nota cu  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}})$  vectorul viteză areolară, din considerațiile precedente rezultă că el este perpendicular pe planul mișcării și are mărime constantă.

*În concluzie, mișcarea unui punct aflat sub acțiunea unei forțe centrale este plană, sau rectilie, în primul caz ea desfășurându-se cu viteză areolară constantă.*

- 2) Definim un câmp de vectori cu simetrie axială a fi acei vectori invarianți la rotațiile din spațiu ce lasă fixe punctele unei axe date. Folosind un sistem de coordonate cilindrice  $(r, \theta, z)$ , în care axa de simetrie este axa  $Oz$ , având versor  $\mathbf{k}$ , rezultă că dacă vectorul  $\mathbf{F}$  are simetrie axială, atunci  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, z)$  și  $\mathbf{F}$  va fi coplanar cu  $\mathbf{k}$ . Reamintindu-ne definiția momentului unei forțe față de o axă, dată în capitolul 3, rezultă că momentul forței  $\mathbf{F}$  în raport cu axa  $Oz$ , va fi dat de expresia:

$$M_z = (\mathbf{x} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} .$$

### **Propoziția 6.1**

*Dacă punctul material  $P$  se mișcă datorită unui câmp de forțe cu simetrie axială în raport cu axa fixă  $Oz$ , atunci proiecția momentului cinetic pe această axă se conservă.*

#### **Demonstrație:**

Din definiție avem  $K_z = \mathbf{K}_O \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{k}$ , de unde rezultă că

$$\dot{K}_z = \underbrace{(\dot{\mathbf{x}} \times m\dot{\mathbf{x}})}_0 \cdot \mathbf{k} + (\mathbf{x} \times m\ddot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{x} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{k} = M_z .$$

Dar  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{F}$  și  $\mathbf{k}$  sunt coplanari, deci produsul mixt  $(\mathbf{x}, \mathbf{F}, \mathbf{k}) = 0$ . Rezultă că avem  $\dot{K}_z = 0$ , deci  $K_z = \text{const.}$  ■

### • **Teorema 6.3 (teorema energiei)**

*Mișcarea unui punct material are loc astfel încât diferențiala energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic elementar efectuat de forța rezultantă aplicată:*

$$dT = dL \quad .$$

**Demonstrație:**

Din principiul acțiunii forțelor  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ , înmulțind scalar cu  $d\mathbf{x}$ , rezultă  $m\ddot{\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ .

De aici, avem  $m\ddot{\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}dt = m\dot{\mathbf{x}} \cdot d\dot{\mathbf{x}} = dT$  și  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = dL$ .

Rezultă că  $dT = dL$  ■

**Propoziția 6.2**

*Variația energiei cinetice între momentele  $t_1$  și  $t_2$  este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă în această trecere:*

$$T(t_2) - T(t_1) = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}}dt \quad .$$

**Demonstrație:**

Evidentă, ținând cont de teorema energiei, integrând-o între momentele  $t_1$  și  $t_2$  ■

Dacă forța rezultantă  $\mathbf{F}$  este *conservativă* ( $\mathbf{F} = \text{grad } \Pi(\mathbf{x})$ ) din teorema energiei rezultă:

$$dT = dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \text{grad } \Pi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = d\Pi \quad .$$

Deci, obținem o integrală primă scalară a mișcării (*integrala primă a energiei*):

$$(6.2) \quad E = T - \Pi = T + V = \text{const.} = h \quad .$$

În această relație  $V(\mathbf{x}) = -\Pi(\mathbf{x})$  definește *energia potențială*, iar  $E$  *energia totală*. Integrala primă a energiei (6.2) ne arată că un punct material ce se mișcă într-un câmp de forțe conservative, o face astfel încât energia sa totală se conservă.

Ideea de energie apare prima oară la Leibniz în 1695, sub forma „forței vii” („vis-viva”). Termenul de „energie” este introdus de Young (1807), iar cel de „lucru mecanic” de către Poncelet (1826).

• **Exerciții și probleme:**

- 1) În cazul mișcării plane a unui punct material, raportată la coordonatele polare  $(r, \theta)$ , să se arate că  $|\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}| = r^2 \dot{\theta}$  .

- 2) Un punct material  $P$  de masă  $m$  se află sub acțiunea forței de atracție universală  $\mathbf{F} = -f \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r}$ , unde  $M$  este masa Pământului și  $r$  distanța de la  $P$  la centrul Pământului.
- a) Ce lucru mecanic este necesar pentru a transporta punctul  $P$  de la suprafața Pământului până la distanța  $R$  de centrul Pământului?
- b) Cu ce viteză va ajunge acest punct pe suprafața Pământului, dacă îl vom lăsa fără viteză inițială din punctul aflat la distanța  $R$ ? Studiați cazul  $R \rightarrow \infty$ . Vom nota cu  $R_0$  raza Pământului.
- 3) Cu ajutorul unei rachete, un corp de masă  $m$  este ridicat la înălțimea  $h$  de la suprafața Pământului. Cu ce viteză, perpendiculară pe verticala locului, trebuie lansat acest corp pentru a descrie uniform o traiectorie circulară? Ce perioadă de revoluție va avea mișcarea?

### *Studiul calitativ al evoluției sistemelor conservative unidimensionale*

- Scopul acestui capitol îl reprezintă studiul calitativ al evoluției sistemelor unidimensionale, aflate sub acțiunea unei forțe conservative, pornind de la integrala primă a energiei. Prezentarea urmărește cartea lui V. Arnold [3].

Vom pleca de la ecuația de mișcare a lui Newton, scrisă sub forma:

$$\ddot{x} = F(x) \quad ,$$

unde forța  $F$  este o funcție diferențiabilă pe un interval  $I \subset \mathbf{R}$ , iar masa  $m = 1$ . Ecuația lui Newton este echivalentă cu sistemul diferențial de primul ordin, scris sub forma normală:

$$(7.1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = F(x_1) \end{cases} \quad , \quad (x_1, x_2) \in I \times \mathbf{R} .$$

Vom defini intervalul  $I$  a fi *mulțimea configurațiilor*, produsul cartezian  $I \times \mathbf{R}$  denumește *planul fazelor*, unde  $x_1 = x$  este *coordonata punctului*, iar  $x_2 = \dot{x}$  este *viteza* sa. Presupunem că forța  $F$  este *conservativă*:

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} ,$$

unde  $V(x)$  este *energia potențială*. Reamintim că  $T = \frac{1}{2} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} x_2^2$  definește *energia cinetică*, iar  $E = T + V$  *energia totală*.

După cum am arătat în capitolul 6, energia totală se conservă (este o *integrală primă scalară* a mișcării):

$$(7.2) \quad E = T + V = \text{const.} = h .$$

Soluțiile sistemului diferențial (7.1) definesc în planul fazelor *traietoriile (orbitele)* sistemului (7.1). Pe de-o parte, din teorema de existență și unicitate a soluției sistemului (7.1), rezultă că prin orice punct al planului fazelor trece o traiectorie și numai una, iar pe de altă parte, deoarece (7.2) reprezintă o integrală primă a sistemului (7.1), energie totală este constantă pe fiecare traiectorie.

Altfel spus, *fiecare traiectorie a sistemului (7.1) este conținută în întregime într-una dintre mulțimile de nivel constant ale energiei*  $E(x_1, x_2) = h$ .

Pozițiile de echilibru ale sistemului (7.1) sunt reprezentate de punctele  $(x_1 = \xi, x_2 = 0)$  de pe axa  $Ox_1$  din planul fazelor, în care  $\left. \frac{dV}{dx_1} \right|_{x_1=\xi} = 0$  (pozițiile de echilibru sunt *punctele critice* ale energiei potențiale). În studiul mulțimilor de nivel constant ale energiei este important să determinăm comportamentul lor în vecinătatea punctelor critice ale energiei potențiale.

În afara acestor cazuri, avem următoarea teoremă.

### **Teorema 7.1**

Orice mulțime de nivel constant a energiei  $\left\{ (x_1, x_2) \middle| \frac{x_2^2}{2} + V(x_1) = E \right\}$  reprezintă o curbă netedă în vecinătatea fiecărui punct al ei, cu excepția pozițiilor de echilibru ale sistemului (7.1).

### **Demonstrație:**

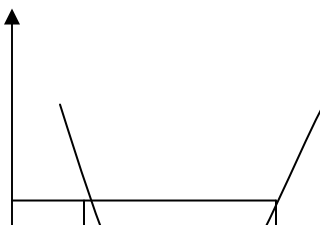
Din faptul că expresia  $T + V = \frac{1}{2} x_2^2 + V(x_1) = E(x_1, x_2) = h$  reprezintă o integrală primă a mișcării, rezultă că  $\frac{\partial E}{\partial x_1} = \frac{dV}{dx_1} = -F(x_1)$ ,  $\frac{\partial E}{\partial x_2} = x_2$ . Dacă într-un punct  $(x_1, x_2)$  una dintre derivatele parțiale ale lui  $E$  este nenulă, din teorema funcțiilor implicite rezultă că mulțimea de nivel constant a energiei totale  $E$  este graficul unei funcții diferențiabile de forma  $x_1 = x_1(x_2)$  sau  $x_2 = x_2(x_1)$  ■

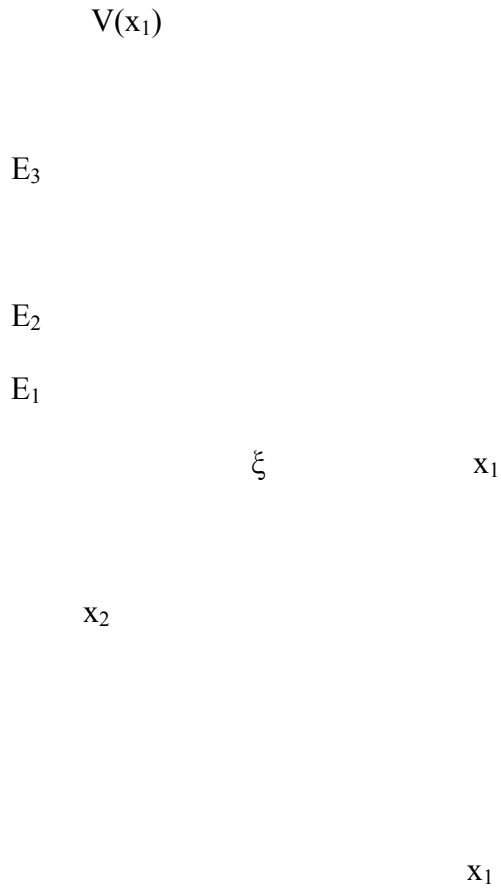
Pentru a vedea caracteristicile curbelor de nivel constant, vom considera câteva cazuri particulare.

1) Primul caz este acela al unei „gropi de potențial”.

Vom fixa valoarea energiei totale  $E$ . Din teorema de conservare a energiei  $\frac{x_2^2}{2} + V(x_1) = E = \text{const.}$  rezultă că  $V(x_1) \leq E$ . Pe de altă parte, avem  $|x_2| = \sqrt{2(E - V(x_1))}$ . Este evident că în punctele  $x_1$  în care  $V(x_1) = E$ , viteza  $x_2 = 0$ . Din faptul că energia totală este o funcție pară în raport cu  $x_2$ , rezultă simetria în raport cu axa  $x_1$  a curbelor de nivel constant ale energiei. Din punct de vedere fizic, aceasta exprimă faptul că punctul trece prin fiecare poziție într-o direcție, sau în cea opusă, cu aceeași viteză.

Fie  $E_2$  energia totală corespunzătoare minimului energiei potențiale. Dacă valoarea energiei totale  $E_1$  este mai mică decât  $E_2$ , atunci mulțimea de nivel constant  $E = E_1$  este vidă. Mulțimea de nivel constant  $E = E_2$  se reduce la punctul  $(\xi, 0)$  din planul fazelor. În acest caz, punctul se află într-o *poziție de echilibru*. Dacă energia totală  $E_3$  este mai mare decât valoarea critică  $E_2$ , atunci mulțimea de nivel constant  $E = E_3$  este o curbă netedă, închisă și simetrică față de axa  $x_1$ , care înconjoară poziția de echilibru  $(\xi, 0)$ . Toate aceste caracteristici ale mulțimilor de nivel constant pot fi analizate în *Figura 7.1*.

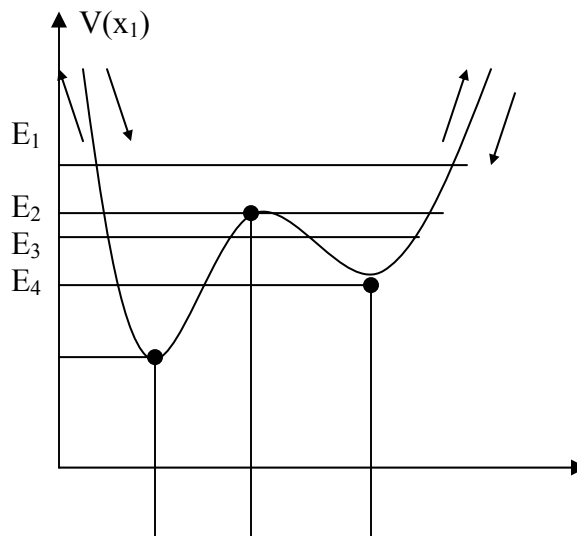




**Figura 7.1**

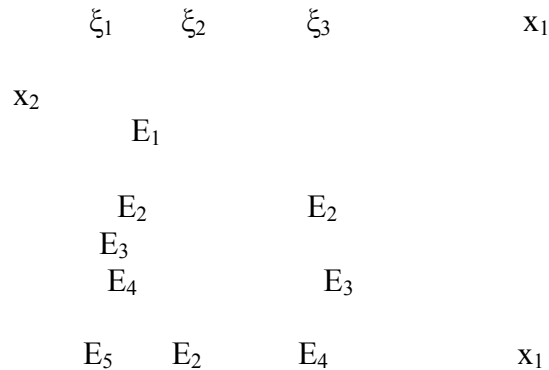
2) Al doilea exemplu, mai complex, este acela al unei energii potențiale cu două „gropi de potențial”.

În acest caz trebuie să analizăm comportamentul curbelor de nivel constant în vecinătatea punctelor critice ale energiei potențiale. După cum se vede în *Figura 7.2*, punctele critice  $\xi_1$  și  $\xi_3$  corespund unor puncte de minim local al energiei potențiale, pe când  $\xi_2$  corespunde unui maxim local. În  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  și  $\xi_3$  orbitele se reduc la punctele de echilibru. Se poate arăta că  $\xi_1$  și  $\xi_3$  sunt punctele de echilibru stabil, iar  $\xi_2$  este punctul de echilibru instabil. Celelalte curbe de nivel constant sunt netede, închise și simetrice în raport cu axa  $x_1$ , cu excepția curbei  $E = E_2$  (numită *curbă separatoare*) care este alcătuită din trei curbe de nivel constant.





$E_5$



**Figura 7.2**

- După aceste două exemple simple, dar sugestive, vom analiza *comportamentul curbelor de nivel constant în vecinătatea unui punct critic al energiei potențiale*.

**Propoziția 7.1**

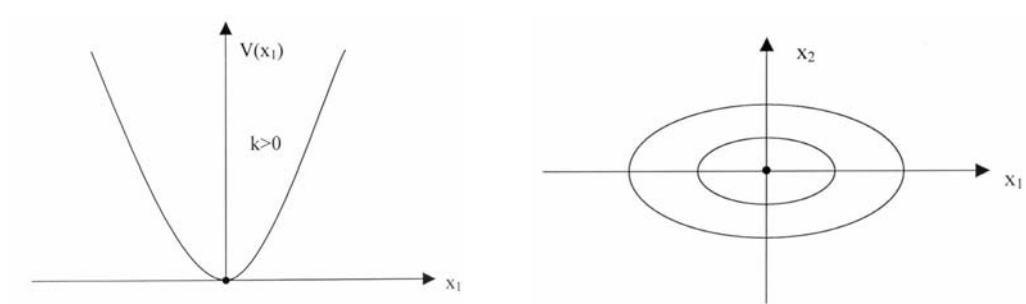
*Dacă energia potențială este dată de forma pătratică  $V(x_1) = \frac{kx_1^2}{2}$ , atunci curbele*

*de nivel constant ale energiei sunt curbele de gradul doi  $2E(x_1, x_2) = x_2^2 + kx_1^2$ .*

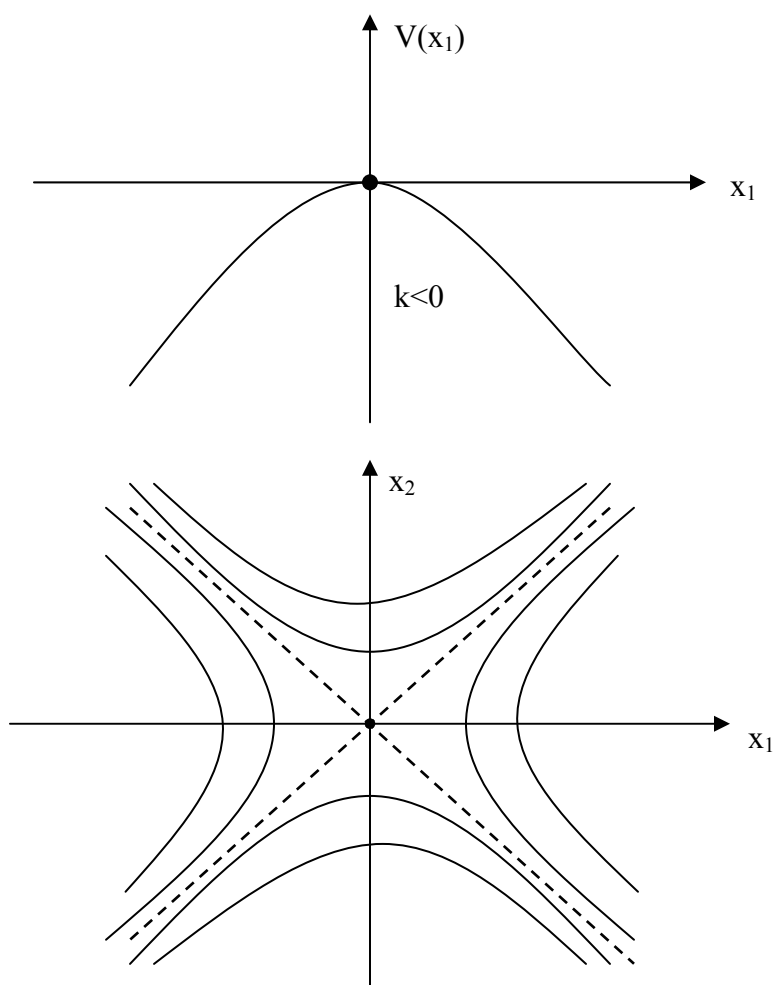
**Demonstrație:**

În cazul unei forțe de atracție ( $k > 0$ ), punctul critic 0 este un punct minim al energiei potențiale. Atunci curbele  $x_2^2 + kx_1^2 = \text{const.}$ , vor fi elipse omotetice cu centrul în  $O$  (vezi Figura 7.3).

Dacă avem o forță de respingere ( $k < 0$ ), punctul critic 0 va fi un punct de maxim al energiei potențiale. În acest caz curbele de nivel constant  $x_2^2 + kx_1^2 = \text{const.}$ , vor fi hiperbole omotetice cu centrul în  $O$ , având asimptote drepte  $x_2 = \pm\sqrt{-k}x_1$ . Aceste asimptote sunt curbele separatoare ale hiperbolelor (vezi Figura 7.4) ■



**Figura 7.3**



**Figura 7.4**

**Propoziția 7.2**

*În vecinătatea unui punct critic nedegenerat al energiei potențiale există o transformare difeomorfă de coordonate astfel încât curbele de nivel constant se transformă fie în elipse, fie în hiperbole.*

Pentru demonstrarea acestui rezultat important vom avea nevoie de câțiva pași. Vom da această demonstrație pentru funcții de o singură variabilă.

În primul rând, vom spune că punctul 0 este un *punct critic* pentru funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , dacă  $f(0)=0$  și  $f'(0)=0$ . Punctul critic 0 se numește *nedegenerat* dacă  $f''(0) \neq 0$ .

O funcție  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  se numește *difeomorfism* dacă  $f$  este bijectivă, iar  $f$  și  $f^{-1}$  sunt diferențiabile.

### **Lema 7.1 (Morse)**

*În vecinătatea unui punct critic nedegenerat există o transformare difeomorfă de coordonate  $x \rightarrow y(x)$ , astfel încât  $f(y) = Cy^2$ ,  $C = \text{sign } f''(0)$ .*

### **Lema 7.2 (Hadamard)**

*Fie  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție diferențiabilă, de clasă  $C^r$ , cu  $f(0)=0$ . Atunci  $f(x) = xg(x)$ , cu  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție diferențiabilă, de clasă  $C^{r-1}$  în vecinătatea punctului  $x=0$ .*

#### **Demonstrație (lema Hadamard):**

$$\text{Avem relația evidentă } f(x) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt = \int_0^1 f'(tx)x dt = xg(x).$$

Deci, funcția  $g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$  este de clasă  $C^{r-1}$  în vecinătatea lui  $x=0$  ■

#### **Demonstrație (lema Morse):**

Vom aplica lema lui Hadamard de două ori funcției  $f$  din enunț. Rezultă că  $f(x) = x^2\varphi(x)$ , cu  $\varphi(0) = \frac{f''(0)}{2} \neq 0$ . Vom defini noua coordonată prin egalitatea  $y(x) = x\sqrt{|\varphi(x)|}$ , de unde, evident, rezultă că  $f(y) = (\text{sign } f''(0))y^2$ . În plus, funcția  $\sqrt{|\varphi(x)|}$  este diferențiabilă în vecinătatea punctului  $x=0$ , fiind de clasă  $C^{r-2}$ , dacă  $f$  este de clasă  $C^r$  ■

Ambele leme pot fi extinse la funcții de mai multe variabile.

**Demonstrație (Propoziția 7.2):**

Conform lemei lui Morse, putem schimba în planul fazelor  $(x_1, x_2)$ , printr-un difeomorfism, sistemul de coordonate  $(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2)$ , astfel încât curbele de nivel constant se transformă, în vecinătatea unui punct critic nedegenerat, în elipse sau hiperbole ■

- În continuare vom obține un rezultat important în studiul calitativ al evoluției sistemelor conservative unidimensionale, privind *prelungirea soluțiilor ecuației lui Newton*.

Vom presupune că energia potențială  $V$  este definită pe întreaga axă  $Ox$ .

**Teorema 7.2**

*Dacă energia potențială  $V$  este pozitiv definită pe întreaga axă  $Ox$ , până la o constantă aditivă, atunci orice soluție a ecuației lui Newton  $\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$  poate fi prelungită nemărginit.*

Pentru demonstrarea acestui rezultat avem nevoie de următoarea leamnă.

**Lema 7.3 (estimare apriorică)**

*Dacă o soluție a ecuației lui Newton este definită pentru  $|t| < \tau$ , atunci ea satisface inegalitățile*

$$|\dot{x}(t)| \leq \sqrt{2E_0} \quad , \quad |x(t) - x(0)| \leq \sqrt{2E_0} |t| \quad ,$$

unde  $E_0 = \frac{\dot{x}(0)^2}{2} + V(x(0))$  este valoarea inițială a energiei totale.

**Demonstrație (lema 7.3):**

Din teorema de conservare a energiei avem  $\frac{\dot{x}(t)^2}{2} + V(x(t)) = E_0$  cu  $V(x(t)) \geq 0$ .

Rezultă că  $|\dot{x}(t)| \leq \sqrt{2E_0}$ .

Deoarece  $x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(s) ds$ , din inegalitatea precedentă obținem

$$|x(t) - x(0)| \leq \sqrt{2E_0} |t| \quad \blacksquare$$

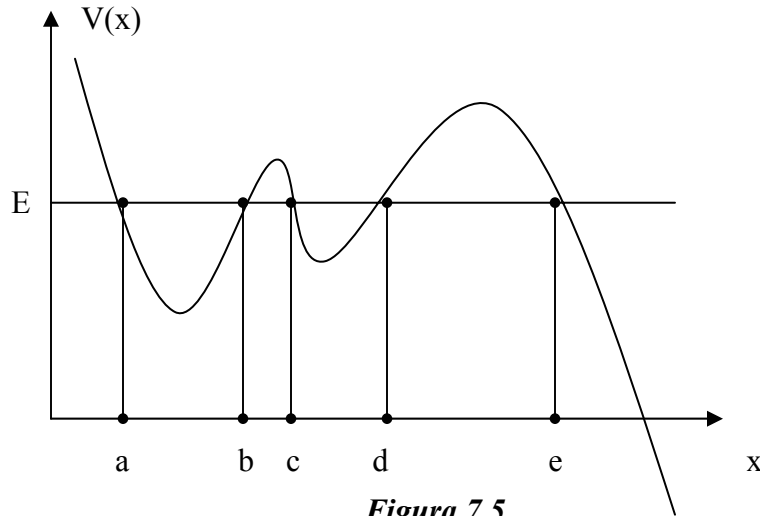
**Demonstrație (teorema 7.2):**

Fie  $T > 0$  un număr arbitrar. În planul fazelor considerăm dreptunghiul  $\Pi$ , dat de inegalitățile:

$$|x_1(t) - x_1(0)| \leq 2\sqrt{2E_0}T, \quad |x_2| \leq 2\sqrt{2E_0}.$$

În spațiul fazelor extins  $(x_1, x_2, t)$  definim paralelipipedul  $(x_1, x_2) \in \Pi, |t| \leq T$ . Conform teoremei de prelungire a soluției unei ecuații diferențiale, soluția se poate prelungi, în mod unic, până la frontiera oricărei mulțimi compacte, incluse în domeniul de definiție (vezi [4], cap.2). În cazul nostru soluția ecuației lui Newton va putea fi prelungită până la frontiera paralelipipedului construit. Din lema anterioară (a doua estimare) rezultă că soluția ajunge la frontiera paralelipipedului *numai* prin fețele pentru care  $|t| = T$ . Deci, soluția poate fi prelungită până la  $x_1(T) = \pm 2\sqrt{2E_0}T, T > 0$  arbitrar. Prin urmare, ea poate fi prelungită nemărginit ■

- Pentru a efectua un studiu sistematic al curbelor de nivel constant al energiei, vom începe cu cazul *curbelor ne-critice de nivel constant*. Astfel, vom presupune că energia potențială este definită pe întreaga axă reală  $Ox$ . Fie  $E$  o valoare a energiei totale ne-critică fixată, adică  $V$  nu ia valoarea  $E$  în nici unul dintre punctele sale critice. Să considerăm mulțimea  $A = \{x / V(x) < E\}$ . Deoarece energia potențială  $V$  este o funcție continuă pe  $\mathbf{R}$ , rezultă că mulțimea  $A$  este formată dintr-o familie finită sau numărabilă de intervale deschise (mărginite sau nu). Evident, punctele mulțimii  $\{x / V(x) = E\}$  reprezintă extremitățile intervalelor precedente (vezi Figura 7.5).



**Figura 7.5**

Pentru a fixa ideile, vom considera intervalul  $a \leq x \leq b$  cu  $V(a) = V(b) = E, V(x) < E$  pentru  $x \in (a, b)$ , respectiv intervalul  $e \leq x < \infty$  cu  $V(e) = E, V(x) < E$  pentru  $x \in (e, +\infty)$ .

### **Teorema 7.3**

Ecuația  $\frac{x_2^2}{2} + V(x_1) = E, a \leq x_1 \leq b$ , definește în planul fazelor o curbă netedă, închisă, difeomorfă cu un cerc. Această curbă este o orbită a sistemului (7.1).

Ecuația  $\frac{x_2^2}{2} + V(x_1) = E$ ,  $e \leq x_1 < \infty$ , definește în planul fazelor o curbă netedă, deschisă, difeomorfă cu o semidreaptă, pe axa  $Ox_1$ . Această curbă este o orbită a sistemului (7.1.).

În fine, în cazul în care  $V(x) < E$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , mulțimea de nivel constant  $E$  este formată din două orbite ale sistemului (7.1), având forma:

$$x_2 = \pm \sqrt{2(E - V(x_1))} .$$

În concluzie, orice mulțime de nivel constant ne-critică este o reuniune cel mult numărabilă de orbite netede.

**Demonstrație:**

Fie  $E$  o valoare fixată a energiei totale. În primul caz, din teorema de conservare a energiei rezultă

$$(7.3) \quad \dot{x}(t) = \pm \sqrt{2(E - V(x))} .$$

În planul fazelor ( $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ) vom presupune că  $x_2 > 0$ . Soluția  $\varphi(t)$  a ecuației lui Newton, supusă condițiilor inițiale  $\varphi(t_0) = x_1^0$ ,  $\dot{\varphi}(t_0) = x_2^0$ , va fi determinată din relația (7.3), sub forma:

$$(7.4) \quad t - t_0 = \int_{x_1^0}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - V(\xi))}} ,$$

pentru  $t$  aflat în vecinătatea lui  $t_0$ . Se observă că integrala:

$$(7.5) \quad \frac{T}{2} = \int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - V(\xi))}}$$

este convergentă, deoarece  $V'(a) \neq 0$ ,  $V'(b) \neq 0$ .

Rezultă că relația (7.4), care descrie timpul de parcurgere a orbitei, definește o funcție continuă

$$\varphi: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbf{R}, \quad \varphi(t_1) = a, \quad \varphi(t_2) = b,$$

care satisface în fiecare punct ecuația lui Newton.

Intervalul  $(t_1, t_2)$  are lungimea  $T/2$ , unde  $T$  este perioada parcurgerii orbitei dată de (7.5). Prelungim soluția  $\varphi(t)$  la următorul interval de timp, având lungimea  $T/2$ , prin simetrie:

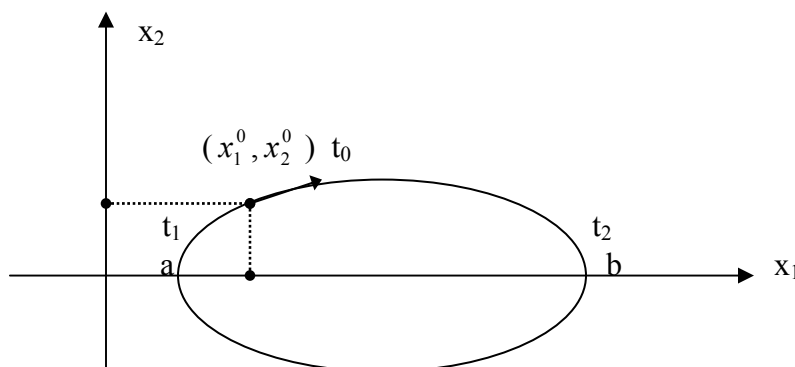
$$\varphi(t_2 + \tau) = \varphi(t_2 - \tau), \quad 0 \leq \tau \leq T/2.$$

Mai departe, vom prelungi funcția  $\varphi$  pe întreaga axă reală, prin periodicitate:  $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ .

Funcția astfel obținută va satisface ecuația lui Newton și condițiile inițiale considerate (vezi *Figura 7.6*).

Prin urmare, soluția problemei Cauchy precizată va fi periodică, de perioadă  $T$ . Deci, orbita corespunzătoare va fi o curbă închisă, netedă, difeomorfă cu un cerc (într-adevăr, se arată ușor că orice orbită închisă, ce nu se reduce la un punct, este difeomorfă cu un cerc, vezi [3]).

Celelalte două cazuri se tratează cu ajutorul teoremei de prelungire a soluției ecuației lui Newton și a relației (7.4) ■



**Figura 7.6**

- Ultimul caz, cel mai complicat, în studiul curbelor de nivel constant ale energiei, este acela al *curbelor critice de nivel constant*. O astfel de curbă conține puncte critice ale energiei potențiale  $(x_1, x_2)$ , astfel încât  $V'(x_1) = 0$ ,  $x_2 = 0$ .

Fiecare asemenea punct reprezintă, în planul fazelor, o orbită. Vom distinge trei cazuri:

- 1) Dacă pe intervalul  $a \leq x_1 \leq b$  avem  $V(x_1) < E$  pentru  $x_1 \in (a, b)$  și

$V'(a) = V'(b) = 0$ ,  $V(a) = V(b) = E$ , atunci cele două curbe deschise, date de expresia:

$$x_2 = \pm \sqrt{2(E - V(x_1))}, \quad a < x_1 < b$$

reprezintă orbite ale ecuației lui Newton. Conform formulei (7.4), timpul de parcurgere al acestor orbite este infinit, punctul reprezentativ din planul fazelor apropiindu-se asimptotic de capetele orbitelor.

- 2) Dacă pe intervalul  $a \leq x_1 \leq b$  avem  $V(x_1) < E$  pentru  $x_1 \in (a, b)$  și  $V(a) = V(b) = E$ ,  $V'(a) = 0$ ,  $V'(b) \neq 0$ , atunci ecuația:

$$\frac{x_2^2}{2} + V(x_1) = E, \quad a < x_1 \leq b$$

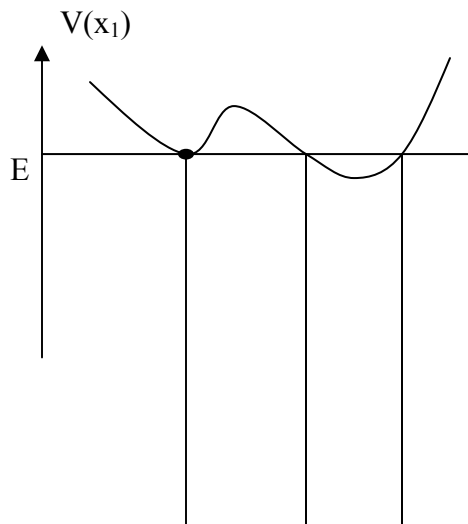
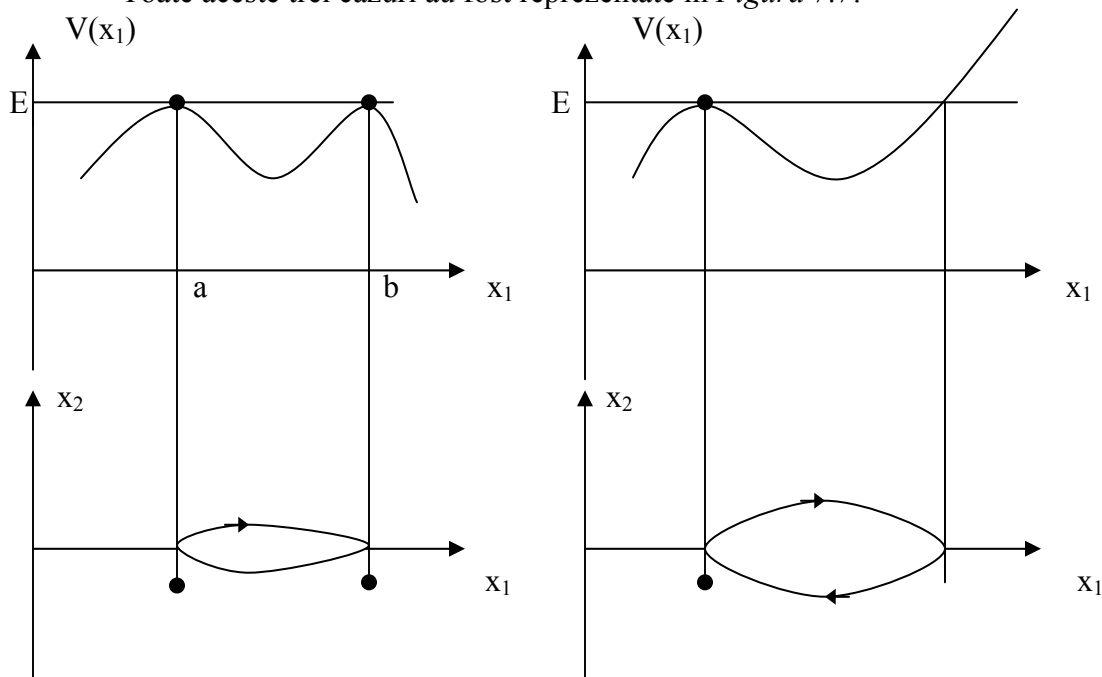
definește o orbită deschisă în capătul din stânga. Punctul reprezentativ se apropie asimptotic de acest capăt al orbitei.

- 3) În fine, dacă pe intervalul  $a \leq x_1 \leq b$  avem  $V(x_1) < E$ , pentru  $x_1 \in (a, b)$ , și dacă există  $c$  exterior intervalului  $[a, b]$ , cu  $V(a) = V(b) = V(c) = E$  și  $V'(a) \neq 0$ ,  $V'(b) \neq 0$  și  $V'(c) = 0$  atunci ecuația

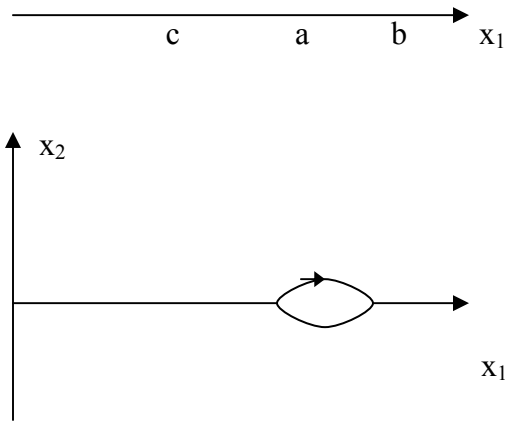
$$\frac{x_2^2}{2} + V(x_1) = E$$

definește o orbită închisă ce se proiectează pe axa  $Ox_1$  pe segmentul  $[a, b]$  ca în cazul ne-critic, iar punctul critic  $x_1 = c$  definește o orbită separată de precedentă.

Toate aceste trei cazuri au fost reprezentate în *Figura 7.7*.







**Figura 7.7**

• **Exerciții și probleme:**

- 1) Să se studieze curbele de nivel constant ale energiei totale în cazul ecuației pendulului matematic  $\ddot{x} = -\sin x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- 2) Să se studieze curbele de nivel constant ale energiei totale în cazul micilor oscilații ale pendulului matematic, în vecinătatea pozițiilor de echilibru inferioară și superioară ( $\ddot{x} = -x$ , respectiv  $\ddot{x} = x$ ).
- 3) Să se studieze curbele de nivel constant ale energiei totale în cazul mișcării sub acțiunea potențialului forței de atracție universală  $V(x) = -\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$ ,  $C > 0$ .
- 4) Să se arate că, în cazul curbelor ne-critice de nivel constant, orbitele închise, ce nu se reduc la un punct, sunt difeomorfe cu cercuri.
- 5) Să se găsească în planul fazelor ecuațiile tangentelor la curbele critice de nivel constant, în punctele de maxim ale energiei potențiale  $V(x_1)$  (punctele  $\xi$ , pentru care  $V(\xi) = E$ ,  $V'(\xi) = 0$ ,  $V''(\xi) < 0$ ).

### Teoremele generale ale mișcării sistemelor de puncte materiale

- În acest capitol vom studia principalele mărimi ale mecanicii Newtoniene, care definesc mișcarea unui sistem discret de puncte materiale, teoremele generale ale mișcării acestor sisteme și consecințele lor cele mai importante.

Definim un *sistem discret de  $n$  puncte materiale*, a fi o mulțime alcătuită din  $n$  puncte materiale aflate în interacțiune și sub acțiunea unor forțe exterioare sistemului. Presupunem că punctul material reprezentativ  $P_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  al acestui sistem, are masa  $m_i$  și vectorul de poziție  $\mathbf{x}_i$ , în raport cu un reper inerțial ortonormat, de centru  $O$ . Presupunem că asupra punctului  $P_i$  acționează *forțele interioare sistemului*  $\mathbf{F}_{ij}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $j \neq i$  și *forța exterioară sistemului*  $\mathbf{F}_i$ . Forța interioară  $\mathbf{F}_{ij}$  exprimă acțiunea punctului material  $P_j$  asupra punctului material  $P_i$ .

În aceste ipoteze, ecuația de mișcare a punctului material  $P_i$  va avea forma:

$$(8.1) \quad m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{ij}, \quad i = \overline{1, n} .$$

În general forțele interioare sunt apriori necunoscute, cu excepția unor ipoteze suplimentare asupra sistemului material. Astfel, sistemul poate fi *rigid, elastic, plastic*, ș.a.m.d., după modul său de deformare.

În orice caz, forțele interioare respectă *principiul acțiunii și al reacțiunii*:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}, \quad \mathbf{F}_{ij} \parallel \overrightarrow{P_i P_j} \quad \forall i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j .$$

În cazul absenței forțelor exterioare sistemului ( $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ ), sistemul material se numește *închis*.

- Prima dintre teoremele generale ale mișcării sistemelor materiale discrete este *teorema impulsului*. Vom defini *impulsul* unui sistem discret de puncte materiale  $\{P_i\}_{i=\overline{1, n}}$  a fi vectorul:

$$(8.2) \quad \mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}_i .$$

#### **Teorema 8.1 (teorema impulsului)**

*Viteza de variație a impulsului unui sistem material discret este egală cu rezultanta forțelor exterioare sistemului:*

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{R} \quad .$$

**Demonstrație:**

Folosind ecuația de mișcare (8.1) și definiția impulsului (8.2) rezultă  $\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{R}$ , deoarece  $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} = 0$ , din principiul acțiunii și al reacțiunii forțelor interioare sistemului ■

### **Corolarul 8.1**

*Impulsul unui sistem material discret închis se conservă.*

**Demonstrație:**

Din teorema 8.1 rezultă  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$ . Deci,  $\mathbf{p} = \overset{\longrightarrow}{\text{const.}}$  ■

### **Corolarul 8.2**

*Dacă rezultanta forțelor exterioare ce acționează asupra unui sistem material discret este perpendiculară pe o axă fixă  $\delta$ , de versor  $\mathbf{u}$ , atunci proiecția impulsului pe această axă,  $p_\delta$ , se conservă.*

**Demonstrație:**

Din teorema 8.1. rezultă  $\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} = 0$ .

Dar,  $\dot{p}_\delta = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}) = \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}$ , axa fiind fixă. Deci,  $\dot{p}_\delta = 0$ , de unde obținem

$p_\delta = \text{const.}$  ■

### **Teorema 8.2 (teorema de mișcare a centrului de masă)**

*Centrul de masă al unui sistem material discret se mișcă la fel ca un punct material, în care ar fi concentrată masa sistemului și asupra căruia ar acționa rezultanta forțelor exterioare sistemului.*

**Demonstrație:**

Teorema 8.1 ne arată că  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}$ . Dar, din definiție, avem  $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{x}}_i$ . Reamintind definiția vectorului de poziție al centrului de masă al sistemului material (vezi, cap. 3)

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \text{prin derivare obținem} \quad \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \ddot{\xi} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}. \quad \text{De aici rezultă}$$

$$M \ddot{\xi} = \mathbf{R}, \quad \text{unde } M = \sum_{i=1}^n m_i \text{ este masa totală a sistemului material} \blacksquare$$

### Corolarul 8.3

*Dacă sistemul material discret este închis, atunci centrul său de masă se mișcă rectiliniu și uniform.*

#### **Demonstrație:**

Folosind teorema 8.2, de mișcare a centrului de masă, în cazul unui sistem material închis, rezultă  $M\ddot{\xi} = 0$ . Deci,  $\xi = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$ , cu  $\mathbf{a}$  și  $\mathbf{b}$  vectori constanți ■

- În continuare vom obține *teorema momentului cinetic* în cazul mișcării unui sistem material discret și vom studia consecințele sale.

Definim *momentul cinetic*  $\mathbf{K}_O$  al sistemului material discret, în raport cu polul  $O$ , a fi vectorul:

$$(8.3) \quad \mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times (m_i \dot{\mathbf{x}}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i.$$

După cum se știe, *momentul resultant*  $\mathbf{M}_O$  al forțelor exterioare sistemului, în raport cu polul  $O$ , a fost definit a fi vectorul:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i.$$

### **Teorema 8.3 (teorema momentului cinetic)**

*Viteza de variație a momentului cinetic al unui sistem material discret este egală cu momentul resultant al forțelor exterioare sistemului:*

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O.$$

#### **Demonstrație:**

Din definiția (8.3) și ecuația de mișcare (8.1) obținem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{K}}_O &= \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{x}}_i \times (m_i \dot{\mathbf{x}}_i) + \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times \left( \mathbf{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{ij} \right) = \mathbf{M}_O + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij}\end{aligned}$$

Suma  $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij}$  este nulă, deoarece avem, pentru orice  $i$  și  $j$  fixați cu  $i \neq j$ , termeni de tipul  $\mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$ . Aici am folosit principiul acțiunii și al reacțiunii și faptul că vectorii  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  și  $\mathbf{F}_{ij}$  au suporturi paralele. Deci,  $\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O$  ■

#### **Corolarul 8.4**

*Dacă sistemul material discret este închis, atunci momentul său cinetic se conservă.*

##### **Demonstrație:**

Din teorema 8.3 a momentului cinetic, pentru un sistem închis, rezultă

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \text{ Deci, } \dot{\mathbf{K}}_O = \overrightarrow{\text{const.}} \quad \blacksquare$$

#### **Corolarul 8.5**

*Dacă proiecția momentului resultant al forțelor exterioare sistemului pe o axă fixă  $\delta$ , de versor  $\mathbf{u}$ , este nulă, atunci proiecția momentului cinetic pe această axă  $K_\delta$  se conservă.*

##### **Demonstrație:**

Proiectăm teorema 8.3 a momentului cinetic pe axa  $\delta$   $\dot{\mathbf{K}}_O \cdot \mathbf{u} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u} = 0$ . Axa  $\delta$  fiind fixă, rezultă că  $\frac{d}{dt}(\mathbf{K}_O \cdot \mathbf{u}) = 0$ . Deci,  $K_\delta = \mathbf{K}_O \cdot \mathbf{u} = \text{const.}$  ■

#### **Observația 8.1**

*Dacă în corolarul 8.5 vom lua axă fixă  $\delta$  drept axa  $Oz$  a unui reper ortonormat, rezultă că avem relațiile:*

$$(8.4) \quad K_z = \mathbf{K}_O \cdot \mathbf{k} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \dot{\theta}_i = \text{const.}$$

Aici  $\mathbf{k}$  este versorul axei  $Oz$ , iar  $(x_i, y_i)$ , respectiv  $(r_i, \theta_i)$ , sunt coordonatele carteziene, respectiv polare, ale vectorilor  $\mathbf{x}_i$  în planul  $(x, y)$  normal axei  $Oz$ . Relația (8.4) reprezintă o generalizare a legii ariilor, obținută în capitolul 6 în cazul mișcării unui punct material.

### Observația 8.2

*Dacă vom alege un reper inerțial cu originea în centrul de masă  $G$  al sistemului de puncte materiale, teorema momentului cinetic își păstrează forma:*

$$\dot{\mathbf{K}}_G = \mathbf{M}_G.$$

Într-adevăr, dacă  $\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}'_i$ , unde  $\mathbf{x}'_i$  este vectorul de poziție al punctului  $P_i$  în raport cu centrul de masă  $G$ , obținem:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_O &= \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}'_i) \times [m_i (\dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\mathbf{x}}'_i)] = \boldsymbol{\xi} \times M \dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\xi} \times \left( \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}'_i \right) - \\ &- \dot{\boldsymbol{\xi}} \times \left( \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}'_i \right) + \sum_{i=1}^n \mathbf{x}'_i \times (m_i \dot{\mathbf{x}}'_i) = \boldsymbol{\xi} \times M \dot{\boldsymbol{\xi}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{x}'_i \times (m_i \dot{\mathbf{x}}'_i) , \end{aligned}$$

deoarece  $\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}'_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}'_i = 0$  din definirea centrului de masă al sistemului material.

Derivând relația precedentă în raport cu timpul, obținem

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \boldsymbol{\xi} \times M \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\mathbf{K}}_G = \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}_G .$$

În fine, utilizând teorema de mișcare a centrului de masă  $M \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{R}$ , rezultă  $\dot{\mathbf{K}}_G = \mathbf{M}_G$ .

Această formă a teoremei momentului cinetic este des utilizată în aplicații, din ea rezultând mișcarea sistemului în raport cu centrul de masă  $G$ . Teorema de mișcare a centrului de masă 8.2 descrie evoluția punctului  $G$ .

- În ultima parte a acestui capitol vom obține *teorema energiei* și consecințele ei în cazul forțelor exterioare conservative.

Definim *energia cinetică* a unui sistem discret de puncte materiale prin scalarul:

$$(8.5) \quad T = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\dot{\mathbf{x}}_i^2}{2} ,$$

iar *lucrul mecanic elementar* al forțelor exterioare sistemului, respectiv al forțelor interioare sistemului, prin expresiile:

$$(8.6) \quad dL_{ext} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{x}_i \quad , \quad dL_{int} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{x}_i$$

#### **Teorema 8.4 (teorema energiei)**

*Diferențiala energiei cinetice a unui sistem material discret este egală cu suma dintre lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare sistemului și lucrul mecanic elementar al forțelor interioare sistemului:*

$$dT = dL_{ext} + dL_{int} \quad .$$

#### **Demonstrație:**

Din definirea energiei cinetice (8.5) și din ecuațiile de mișcare (8.1) rezultă:

$$dT = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} d(\dot{\mathbf{x}}_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i dt = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij}) \cdot d\mathbf{x}_i = dL_{ext} + dL_{int}$$

■

#### **Corolarul 8.6**

*Variația energiei cinetice a unui sistem material discret la trecerea sistemului din starea (1), de la momentul  $t_1$ , în starea (2), de la momentul  $t_2$ , este egală suma dintre lucrul mecanic al forțelor exterioare sistemului și lucrul mecanic al forțelor interioare sistemului, efectuate la această trecere:*

$$T(t_2) - T(t_1) = \int_{(1)}^{(2)} dL_{ext} + \int_{(1)}^{(2)} dL_{int} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i dt \quad .$$

#### **Demonstrație:**

Este evidentă, prin integrarea expresiei din teorema energiei 8.4, de la momentul  $t_1$  la momentul  $t_2$  ■

Pentru a calcula lucrul mecanic elementar al forțelor interioare sistemului, vom fixa două puncte  $P_i$  și  $P_j$ , cu  $i, j = \overline{1, n}$ . În acest caz, lucrul mecanic elementar al interacțiunii punctelor  $P_i$  și  $P_j$  va avea forma:

$$dL_{int}^{(ij)} = \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{x}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{x}_j = \mathbf{F}_{ij} \cdot (d\mathbf{x}_i - d\mathbf{x}_j) = \mathbf{F}_{ij} \cdot d(\overrightarrow{P_j P_i}) \quad .$$

Dacă vom nota cu  $\mathbf{u} = \text{vers}(\overrightarrow{P_j P_i})$  și cu  $\rho_{ij} = |\overrightarrow{P_j P_i}|$ , atunci  $\mathbf{F}_{ij} = F_{ij} \mathbf{u}$ . Obținem expresia lucrului mecanic elementar:

$$dL_{\text{int}}^{(ij)} = (F_{ij} \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} d\rho_{ij} + \rho_{ij} d\mathbf{u}) = F_{ij} d\rho_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ij} d\rho_{ij} + F_{ji} d\rho_{ij}) .$$

Revenind la întregul sistem material, lucrul mecanic elementar al forțelor interioare sistemului va avea expresia:

$$(8.7) \quad dL_{\text{int}} = \sum_{i < j} F_{ij} d\rho_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n F_{ij} d\rho_{ij} .$$

O consecință imediată a expresiei (8.7) este faptul că lucrul mecanic elementar al forțelor interioare unui *sistem material rigid* este *nul*.

### **Teorema 8.5**

*Dacă presupunem că există o funcție  $U$ , ce depinde numai de coordonatele sistemului material discret, astfel ca  $dL_{\text{int}} = -dU$ , atunci:*

$$d(\mathcal{T} + U) = dL_{\text{ext}}$$

$$(\mathcal{T} + U)(t_2) - (\mathcal{T} + U)(t_1) = \int_{(1)}^{(2)} dL_{\text{ext}} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i dt .$$

### **Demonstrație:**

Este evidentă, utilizând teorema energiei 8.4 și corolarul 8.6 ■

Funcția  $U$  se numește *energie potențială internă* a sistemului material discret. Dacă presupunem că există funcțiile de coordonate  $U_{ij}$ , astfel ca  $F_{ij} d\rho_{ij} = dU_{ij}$ , atunci conform formulei (8.7) energia internă a sistemului va avea forma:

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n U_{ij} .$$

Acesta este cazul forțelor interioare ce depind numai de distanță  $F_{ij} = F_{ij}(\rho_{ij})$ . Atunci, vor exista funcții  $U_{ij}$ , astfel încât  $F_{ij} d\rho_{ij} = dU_{ij}$ , date de:

$$U_{ij} = \int F_{ij}(\rho_{ij}) d\rho_{ij} .$$

### **Teorema 8.6**



În ipotezele teoremei 8.5, dacă există și o funcție de coordonate  $V$ , astfel ca  $dL_{ext} = -dV$ , atunci:

$$(T + U + V)(t_1) = (T + U + V)(t_2) .$$

**Demonstrație:**

Evidentă, având în vedere teorema 8.5 ■

Funcția  $V$  se numește *energie potențială externă* a sistemului material discret, iar suma  $E = T + U + V$  se numește *energie totală* a sistemului material discret. Teorema 8.6 ne arată că energia totală a sistemului este o *integrală primă* scalară a mișcării (*energie totală se conservă*).

Acest fapt are loc dacă, de exemplu, forțele exterioare sistemului sunt conservative  $F_i = -\text{grad}V_i$ ,  $V_i = V_i(\mathbf{x}_i)$ . Atunci, energia potențială externă va avea expresia:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i .$$

**Observația 8.3**

Dacă vom alege un reper inerțial cu originea în centrul de masă  $G$  al sistemului de puncte materiale, teorema energiei 8.4 își păstrează forma:

$$dT_G = dL_{int}^G + dL_{ext}^G .$$

Într-adevăr, din relația  $\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}'_i$ , unde  $\mathbf{x}'_i$  este vectorul de poziție al punctului  $P_i$  în raport cu centrul de masă  $G$ , obținem:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\mathbf{x}}'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\mathbf{x}}'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}'_i \cdot \dot{\mathbf{x}}'_i = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 + T_G , \end{aligned}$$

deoarece  $\sum_{i=1}^n m_i \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\mathbf{x}}'_i = \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}'_i \right) = 0$ , din definiția centrului de masă al sistemului.

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
dL_{\text{int}} + dL_{\text{ext}} &= \sum_{i=1}^n \left[ \left( \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i \right) \cdot d\mathbf{x}_i \right] = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i \right) \cdot (d\xi + d\mathbf{x}'_i) \right] = \\
&= \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right) \cdot d\xi + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i \right) \cdot d\mathbf{x}'_i + \left( \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot d\xi = \\
&= \mathbf{R} \cdot d\xi + dL_{\text{int}}^G + dL_{\text{ext}}^G,
\end{aligned}$$

deoarece  $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} = 0$ .

Din relațiile precedente, rezultă:

$$dT = M\ddot{\xi} \cdot \dot{\xi} dt + dT_G = \mathbf{R} \cdot d\xi + dT_G,$$

unde am folosit teorema 8.2, de mișcare a centrului de masă.

Pe de altă parte, din teorema energiei 8.4, avem:

$$dT = dL_{\text{int}} + dL_{\text{ext}} = \mathbf{R} \cdot d\xi + dL_{\text{int}}^G + dL_{\text{ext}}^G.$$

Comparând cele două expresii ale diferențialei energiei cinetice  $dT$ , vom obține rezultatul afirmat:

$$dT_G = dL_{\text{int}}^G + dL_{\text{ext}}^G.$$

• **Exerciții și probleme:**

- 1) Să se deducă relațiile (8.4).
- 2) Două puncte materiale  $P_1$  și  $P_2$ , de mase egale  $m_1=m_2=m$ , pot aluneca fără frecare pe două bare orizontale, aflate în același plan vertical la distanța  $2a$ . Punctele se atrag cu o forță proporțională cu distanța  $|P_1P_2|$ , factorul de proporționalitate fiind  $k$ . Să se afle:
  - a) Mișcarea centrului de masă al sistemului material.
  - b) Mișcarea punctelor materiale în raport cu centrul de masă.
- 3) Un sistem de  $n$  puncte materiale  $P_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , este supus doar acțiunii forțelor interioare. Presupunem că masele punctelor sunt identice,  $m_i = m$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ , iar forțele interioare sunt de tip elastic cu modulul  $k$ . Se cere:
  - a) Mișcarea centrului de masă al sistemului material;
  - b) Să se arate că accelerația unui punct arbitrar  $P_i$  al sistemului material este permanent îndreptată spre centrul de masă  $G$  al sistemului;

- c) Să se afle mișcarea relativă a sistemului față de centrul de masă.
- 4) Două puncte materiale  $P_1$  și  $P_2$ , având aceeași masă  $m$ , se mișcă în plan orizontal fix  $Ox_1x_2$ , fiind legate printr-un fir inextensibil și fără masă, de lungime  $2l$ . Să se studieze mișcarea sistemului în următoarele cazuri:
- a) Asupra punctelor  $P_1$  și  $P_2$  acționează forțele  $\mathbf{F}_1$  și  $\mathbf{F}_2$ , orientate normal pe axa  $Ox_2$  și având mărimile proporționale cu distanțele punctelor respective la această axă;
- b) Punctul  $P_1$  este atras de punctul fix  $O_1(a,0)$ , iar punctul  $P_2$  este atras de punctul fix  $O_2(-a,0)$ , cu forțe ale căror mărimi sunt proporționale cu distanțele  $|P_1O_1|$ , respectiv  $|P_2O_2|$ .

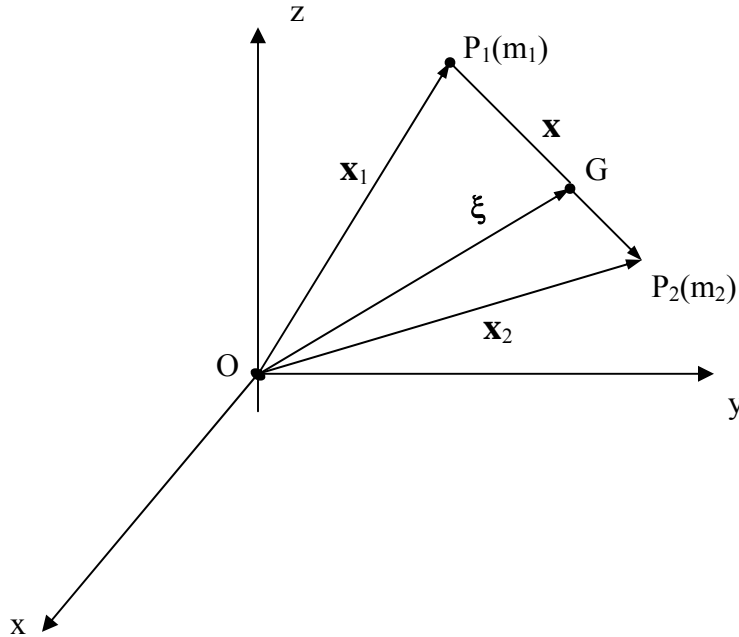
**Problema celor două corpuri**

- Această problemă celebră va ilustra aplicarea teoremelor generale prezentate în capitolele 8 și 5. Vom începe cu deducerea *ecuațiilor de mișcare*.

Fie  $P_1$  și  $P_2$  două puncte materiale, de mase  $m_1$  și  $m_2$ , aflate în interacțiune. Fie  $\mathbf{F}_{12}$  forța exercitată de punctul  $P_2$  asupra lui  $P_1$ , după suportul vectorului  $\overrightarrow{P_1 P_2}$ , respectiv  $\mathbf{F}_{21}$  forța exercitată de punctul  $P_1$  asupra lui  $P_2$  după suportul vectorului  $\overrightarrow{P_2 P_1}$ . Din principiul acțiunii și al reacțiunii rezultă:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad \mathbf{F}_{21} = F(r) \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} = F(r) \frac{\mathbf{x}}{r} = \mathbf{F}(r),$$

unde funcția scalară  $F$  va fi *pozitivă* în cazul forțelor de respingere (*repulsive*) și *negativă* în cazul forțelor de atracție (*attractive*).



**Figura 9.1**

Presupunem că asupra sistemului nu acționează forțe exterioare. Prin urmare, ecuațiile de mișcare ale celor două puncte materiale, în raport cu reperul ortonormat  $Oxyz$ , vor avea forma:

$$(9.1) \quad m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_{21}.$$

### **Teorema 9.1**

Centrul de masă  $G$  al sistemului format din punctele materiale  $P_1$  și  $P_2$  se mișcă rectiliniu și uniform. Ecuația mișcării relative a punctului  $P_2$  în raport cu  $P_1$  va avea forma:

$$(9.2) \quad \mu \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

unde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = F(r) \frac{\mathbf{x}}{r} = \mathbf{F}_{21}, \text{ iar } r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|.$$

### **Demonstrație:**

Deoarece sistemul format din cele două puncte materiale este închis, din corolarul 8.3 rezultă că centrul de masă  $G$  al sistemului se mișcă rectiliniu și uniform.

Din ecuațiile (9.1) rezultă că

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}$$

$$\text{Deci, } m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{x}}_2 - \ddot{\mathbf{x}}_1) = (m_1 + m_2) \mathbf{F}. \text{ Deci, } \mu \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \blacksquare$$

În particular, dacă avem un câmp potențial al forțelor interioare  $\mathbf{F} = -\text{grad}_{\mathbf{x}} V(r)$ , atunci ecuația mișcării relative a punctului  $P_2$  în raport cu  $P_1$  va avea forma:

$$(9.3) \quad \mu \ddot{\mathbf{x}} = -\text{grad}_{\mathbf{x}} V(r).$$

În concluzie, pentru a studia mișcarea relativă a punctului  $P_2$  în raport cu  $P_1$ , vom folosi ecuația de mișcare (9.2), respectiv (9.3), ca și când punctul  $P_1$  ar fi centrul unui sistem inerțial, iar masa punctului mobil  $P_2$  ar fi  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  (masa echivalentă). În această abordare, forța  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  devine centrală.

- Prin urmare, mișcarea relativă a punctului  $P_2$  în raport cu  $P_1$ , în cazul unui câmp conservativ de forțe, va fi redusă la studiul ecuației (9.3), într-un reper inerțial centrat în  $P_1$ . Deoarece forța  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  este centrală în acest reper, conform primei consecințe a teoremei momentului cinetic din capitolul 6, rezultă că mișcarea relativă a lui  $P_2$  în raport cu  $P_1$  este plană și se efectuează cu viteză areolară constantă. Dacă  $\mathbf{x}_0$  va fi poziția sa inițială, iar  $\dot{\mathbf{x}}_0$  va fi viteza inițială, atunci planul mișcării va fi determinat de vectorii  $\mathbf{x}_0$  și  $\dot{\mathbf{x}}_0$ . În acest plan vom considera coordonatele polare  $(r, \theta)$ ,  $r = |\mathbf{x}|$ .

După cum se știe (vezi capitolul 2), componentele accelerației în coordonate polare au forma:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad .$$

Pe de altă parte, din capitolul 6 știm că viteza areolară este constantă  $\frac{1}{2}|\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}| = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{const.} = \frac{C}{2}$  (*integrala primă a ariilor*). Deci, proiectând ecuația de mișcare (9.3) pe direcția razei vectoriale, obținem:

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad \text{sau} \quad \mu\ddot{r} = \mu\frac{C^2}{r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \quad .$$

În final, rezultă ecuația diferențială fundamentală:

$$(9.4) \quad \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V_e}{\partial r}, \quad V_e(r) = V(r) + \frac{\mu C^2}{2r^2},$$

în care  $V_e(r)$  definește *energie potențială efectivă*.

Dacă vom calcula energia totală, obținem relațiile:

$$(9.5) \quad \begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{x}}^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \\ &= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\mu C^2}{2r^2} + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_e(r) = \text{const.} \end{aligned}$$

care reprezintă diferite forme ale teoremei de conservare a energiei totale în cazul unei forțe  $\mathbf{F}$  conservative.

Integralele prime ale ariilor și energiei determină mișcarea. Într-adevăr, din (9.5) rezultă

$$(9.6) \quad \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_e(r))} \quad ,$$

de unde obținem

$$(9.7) \quad t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_e(r))}},$$

relație care ne dă  *timpul descrierii orbitei*.

Din integrala ariilor  $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$  și ecuația (9.6), eliminând timpul, rezultă:

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{C}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_e(r))}} \quad .$$

Prin urmare, obținem *ecuația orbitei* în coordonate polare, sub forma:

$$(9.8) \quad \theta - \theta_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{C/r^2}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_e(r))}} dr \quad .$$

În relațiile (9.7) și (9.8),  $r_0 = r(t_0)$  și  $\theta_0 = \theta(t_0)$  sunt coordonatele polare ale poziției inițiale  $\mathbf{x}_0$ .

O formă echivalentă, utilă în aplicații, a ecuației (9.4) a fost dată de A.C. Clairaut (vezi [2]). Astfel, dacă folosim teorema de derivare a funcțiilor compuse și integrala ariilor, obținem:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) , \\ \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) . \end{aligned}$$

Deci, ecuația (9.4) va avea forma echivalentă:

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\mu C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r(\theta)} \right) = -\frac{\partial V_e}{\partial r} \quad .$$

Notând  $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$  și observând că  $\frac{\partial V_e}{\partial r} = \frac{\partial V_e}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial V_e}{\partial u}$ , obținem *ecuația lui*

*Clairaut*:

$$(9.9) \quad \mu \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{1}{C^2} \frac{\partial V_e(1/u)}{\partial u} \quad .$$

- \* În încheierea acestui capitol vom efectua un *studiu calitativ al orbitelor* (vezi [2]). Vom fixa constanta ariilor  $C \neq 0$  și energia totală  $E$ . Orbita corespunzătoare valorilor date  $C$  și  $E$  este conținută în mulțimea  $V_e(r) \leq E$ , după cum am arătat în capitolul 7. Pe frontiera  $V_e = E$  a acestei mulțimi, din relația (9.6), rezultă că  $\dot{r} = 0$ . Cu toate acestea, viteza punctului *nu* este nulă, deoarece  $\theta \neq 0$  din legea ariilor (cu  $C \neq 0$ ). Mulțimea  $V_e(r) \leq E$  definește în planul mișcării una sau mai multe coroane circulare, date de inegalitățile:

$$0 \leq r_{\min} \leq r \leq r_{\max} \leq \infty \quad .$$

În continuare vom studia cazurile ce pot apărea în studiul orbitelor.

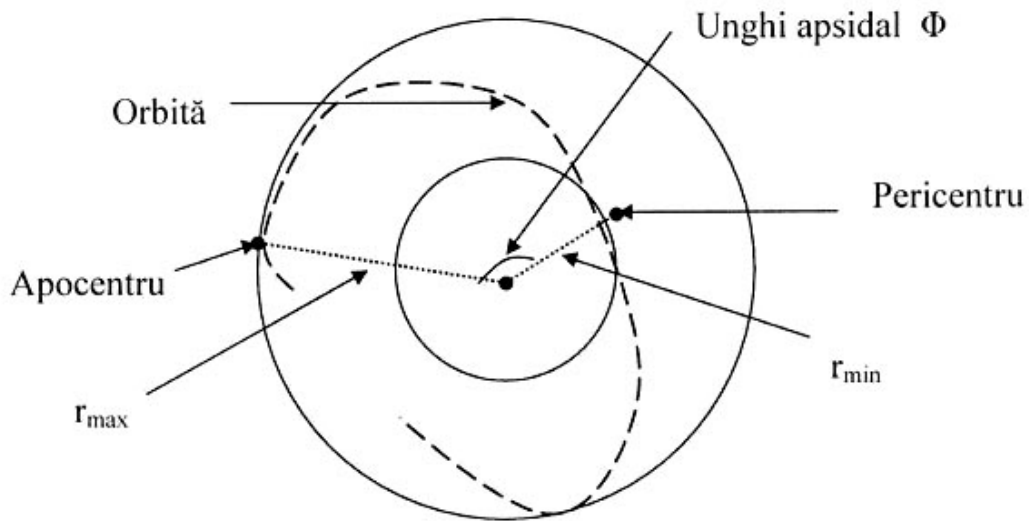
1) Dacă  $0 < r_{\min} \leq r \leq r_{\max} < \infty$ , mișcarea este mărginită și se desfășoară în interiorul coroanei generate de cercurile concentrice de raze  $r_{\min}$  și  $r_{\max}$ . Punctele  $r = r_{\min}$  se numesc *pericentre*, iar cele pentru care  $r = r_{\max}$  se numesc *apocentre*. Deoarece  $r^2 \dot{\theta} = C \neq 0$ , rezultă că  $\dot{\theta}$  are un semn constant, deci  $\theta(t)$  *variază monoton*. În acest timp raza  $r$  oscilează periodic între  $r_{\min}$  și  $r_{\max}$ .

Axele care unesc centrul coroanei cu apocentrul, respectiv cu pericentru sunt axe de simetrie ale orbitei (*axe apsidale*). Acest fapt rezultă ușor, observând că dacă  $u(\theta)$  este soluția ecuației (9.9), atunci și  $u(-\theta)$  este soluția aceleași ecuații. Unghiul  $\Phi$  determinat de două axe apsidale succesive se numește *unghi apsidal*. Din formula (9.8) rezultă că unghiul apsidal este dat de integrala:

$$(9.10) \quad \Phi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{C/r^2}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_e(r))}} dr ,$$

alegând constanta  $C > 0$ .

Orbita va fi *închisă* dacă unghiul apsidal este comensurabil cu  $2\pi$ , adică dacă  $\Phi = 2\pi \frac{m}{n}$ , cu  $\frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ . În caz contrar, dacă  $\Phi$  *nu* este comensurabil cu  $2\pi$ , se poate arăta că orbita este densă în coroana  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  (vezi [2] pentru detalii suplimentare).



**Figura 9.2**



- 2) Dacă  $r_{\min} = r_{\max} = r_0$ , coroana circulară din cazul precedent se reduce la un cerc de centru  $O$  și rază  $r_0$ . Orbita va fi cercul  $r = r_0$ , descris cu viteza unghiulară constantă  $\dot{\theta} = C / r_0^2 = \text{const.}$
- 3) Dacă  $0 < r_{\min} \leq r \leq r_{\max} < \infty$  și  $r_{\min} \simeq r_{\max}$ , orbita se va afla într-o coroană circulară de grosime foarte mică. În acest caz, raza  $r$  va efectua *mici oscilații* în jurul orbitei circulare.
- 4) Să presupunem că  $r_{\max} = \infty$  în ipotezele de la punctul 1). Dacă  $\lim_{r \rightarrow \infty} V_e(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = V_\infty < \infty$ , atunci orbita va fi deschisă, punctul îndepărtându-se la infinit. Dacă, în plus, energia totală  $E > V_\infty$ , atunci punctul  $P_2$  va tinde la infinit cu viteza  $\dot{r}_\infty = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_\infty)}$ .
- 5) Dacă, pentru  $r \rightarrow 0$ ,  $|V(r)|$  nu crește mai repede decât  $\frac{\mu C^2}{2r^2}$  spre infinit, atunci  $r_{\min} > 0$ . Dacă  $V_e(r) = V(r) + \frac{\mu C^2}{2r^2} \rightarrow -\infty$ , pentru  $r \rightarrow 0$ , punctul material se poate apropia de centrul coroanei. Astfel, se poate ajunge în centrul coroanei într-un timp finit (de exemplu, pentru  $V(r) = -\frac{1}{r^3}$ ).

După analiza amănunțită a orbitelor, vom menționa (pentru demonstrație, vezi exercițiile de la sfârșitul capitolului și monografia [2]) un rezultat fundamental în studiul orbitelor din problema celor două corpuri, datorat lui J. Bertrand (1873). El a arătat că dacă orbitele sunt suficient de apropiate de o orbită circulară (cazul 3)) atunci ele sunt *închise* dacă și numai dacă  $V(r) = ar^2$ ,  $a \geq 0$  (*oscilatorul eliptic*) sau  $V(r) = -k/r$ ,  $k \geq 0$  (*mișcarea kepleriană*). Despre ultimul caz vom discuta, pe larg, în capitolul următor.

**\* Exerciții și probleme:**

- 1) Arătați că unghiul apsidal  $\Phi$ , dat de relația (9.10), este egal cu jumătatea perioadei de oscilație a unui sistem unidimensional având energia potențială  $W(x) = V\left(\frac{C}{x}\right) + \frac{\mu x^2}{2}$ .
- 2) Găsiți unghiul apsidal  $\Phi_{\text{circ.}}$  în cazul unei orbite apropiate de o orbită circulară de rază  $r$ .

- 3) Pentru ce formă a energiei potențiale  $V(r)$  unghiul apsidal  $\Phi_{circ.}$  din problema precedentă nu depinde de raza  $r$ ?
- 4) Presupunem că  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \infty$ . Să se găsească  $\lim_{E \rightarrow \infty} \Phi(E, C)$ .
- 5) Fie  $V(r) = -kr^{-\beta}$ ,  $0 < \beta < 2$ . Aflați  $\Phi_0 = \lim_{E \rightarrow 0} \Phi$ . Să se arate că  $\Phi_0$  nu depinde de  $C$ .
- 6) Să se arate că toate orbitele, apropiate de o orbită circulară, determinate de un câmp de forțe centrale, sunt închise, dacă și numai dacă  $V(r) = ar^2$ ,  $a \geq 0$ , sau  $V(r) = -k/r$ ,  $k \geq 0$ .

### ***Mișcarea kepleriană***

- Problema lui Kepler privește mișcarea unei planete de masă  $m$ , centrată în  $P$ , în raport cu Soarele, având centrul  $S$  și masa  $M$ , sub acțiunea forței de atracție universală. După cum am văzut în capitolul 5, această forță este centrală, în raport cu un reper inerțial având originea în  $S$ , și are expresia:

$$\mathbf{F} = -\frac{fmM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad \mathbf{x} = \overrightarrow{SP}, \quad r = |\mathbf{x}|.$$

În acest caz energia potențială va avea forma:

$$V(r) = -\frac{fmM}{r},$$

în timp ce energia potențială efectivă va fi:

$$V_e(r) = -\frac{fmM}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2}.$$

Aici  $\mu = \frac{mM}{m+M}$  este masa echivalentă,  $f$  constanta atracției universale, iar  $C$  este constanta ariilor. În acest caz, ecuația lui Clairaut (9.9) va deveni:

$$\mu \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{1}{C^2} (-fmM + \mu C^2 u), \quad u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}.$$

De aici, rezultă:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{f(m+M)}{C^2},$$

ecuație diferențială care are soluția:

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_1) + \frac{f(m+M)}{C^2}.$$

Exprimând constantele  $A = \frac{e}{p}$  și  $\frac{f(m+M)}{C^2} = \frac{1}{p}$ , obținem soluția anterioară, sub forma:

$$(10.1) \quad r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_1)}.$$

Această formulă ne arată că traiectoria punctului material  $P$  este o *conică*, în planul mișcării. Relația (10.1) se mai numește și *ecuația focală* a secțiunii conice.

Pentru determinarea parametrilor  $p$  și  $e$  ai conicei vom folosi integralele prime ale mișcării în câmp central de forțe. Astfel, din teorema de conservare a momentului cinetic:

$$|\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}| = |\mathbf{x}_0 \times \dot{\mathbf{x}}_0| = C, \quad ,$$

notând cu  $r_0 = |\mathbf{x}_0|$ ,  $v_0 = |\dot{\mathbf{x}}_0|$  și  $\alpha_0 = \angle(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$ , obținem *parametrul*  $p$  al conicei, sub forma:

$$(10.2) \quad p = \frac{C^2}{f(m+M)} = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{f(m+M)} > 0.$$

*Excentricitatea*  $e$  a conicei poate fi determinată din condițiile inițiale  $u_0 = u(\theta_0) = \frac{1}{r_0}$  și  $u'_0 = \frac{du}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0}$ . Mai precis, din (10.1) rezultă:

$$u_0 = \frac{e \cos(\theta_0 - \theta_1) + 1}{p}$$

sau:

$$(10.3) \quad e \cos(\theta_0 - \theta_1) = \frac{p}{r_0} - 1.$$

Derivând (10.1) și folosind integrala ariilor  $r^2 \dot{\theta} = C$ , obținem:

$$u'(\theta) = -\frac{e}{p} \sin(\theta - \theta_1) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{C},$$

de unde, rezultă:

$$\frac{\dot{r}_0}{C} p = e \sin(\theta_0 - \theta_1) \quad ,$$

sau:

$$(10.4) \quad e \sin(\theta_0 - \theta_1) = \frac{v_0 \cos \alpha_0 p}{C} = \frac{p}{r_0} \operatorname{ctg} \alpha_0.$$

În fine, din (10.3) și (10.4) obținem *excentricitatea*  $e$  a conicei, sub forma următoare:

$$(10.5) \quad e = \sqrt{\left(\frac{p}{r_0} \operatorname{ctg} \alpha_0\right)^2 + \left(\frac{p}{r_0} - 1\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{p}{r_0} \left(\frac{p}{r_0 \sin^2 \alpha_0} - 2\right)}.$$

Având în vedere formula (10.5), putem clasifica conica (10.1) după cum urmează:

1) Dacă  $0 < e < 1$ , adică:

$$\frac{p}{r_0 \sin^2 \alpha_0} - 2 < 0,$$

sau, exprimându-l parametrul  $p$  din (10.2), dacă:

$$(10.6) \quad r_0 v_0^2 < 2f(m+M),$$

atunci traiectoria va fi o *elipsă*.

2) Dacă  $e = 1$ , adică:

$$\frac{p}{r_0 \sin^2 \alpha_0} - 2 = 0,$$

sau, dacă:

$$(10.7) \quad r_0 v_0^2 = 2f(m+M),$$

atunci traiectoria va fi o *parabolă*.

3) Dacă  $e > 1$ , adică:

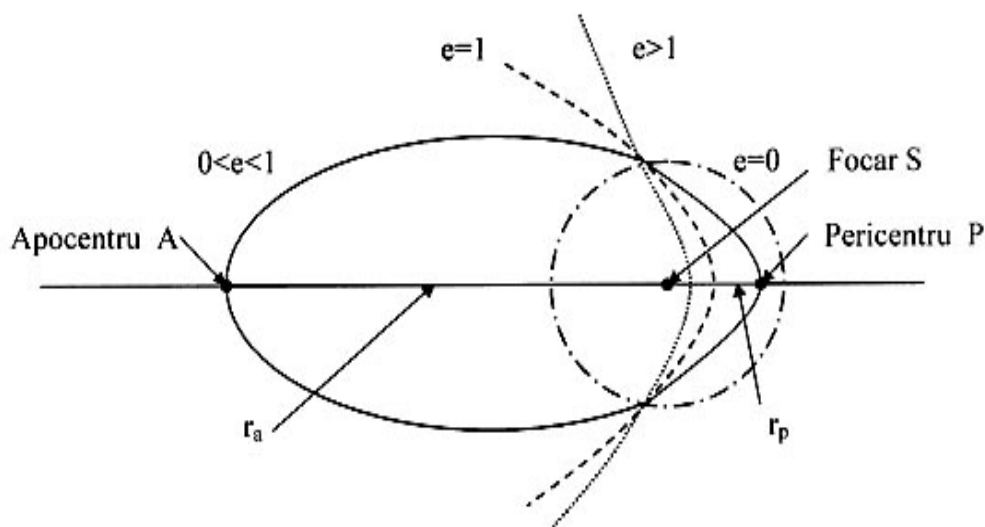
$$\frac{p}{r_0 \sin^2 \alpha_0} - 2 > 0,$$

sau, dacă:

$$(10.8) \quad r_0 v_0^2 > 2f(m+M),$$

atunci traiectoria va fi o *hiperbolă*.

4) Dacă  $e = 0$ , din (10.1) rezultă că traiectoria va fi un *cerc*.



**Figura 10.1**

În *Figura 10.1* sunt figurate traiectoriile posibile ale planetei  $P$ , în raport cu Soarele  $S$  aflat în focarul conicelor. În cazul mișcării eliptice ( $0 < e < 1$ ) am notat cu  $r_a$  și  $r_p$ , distanțele la apocentru, respectiv pericentru. Din forma (10.1) a traiectoriei, rezultă:

$$(10.9) \quad \begin{aligned} r_p &= \frac{p}{1+e} = \frac{C^2}{f(m+M)} \cdot \frac{1}{1+e} , \\ r_a &= \frac{p}{1-e} = \frac{C^2}{f(m+M)} \cdot \frac{1}{1-e} . \end{aligned}$$

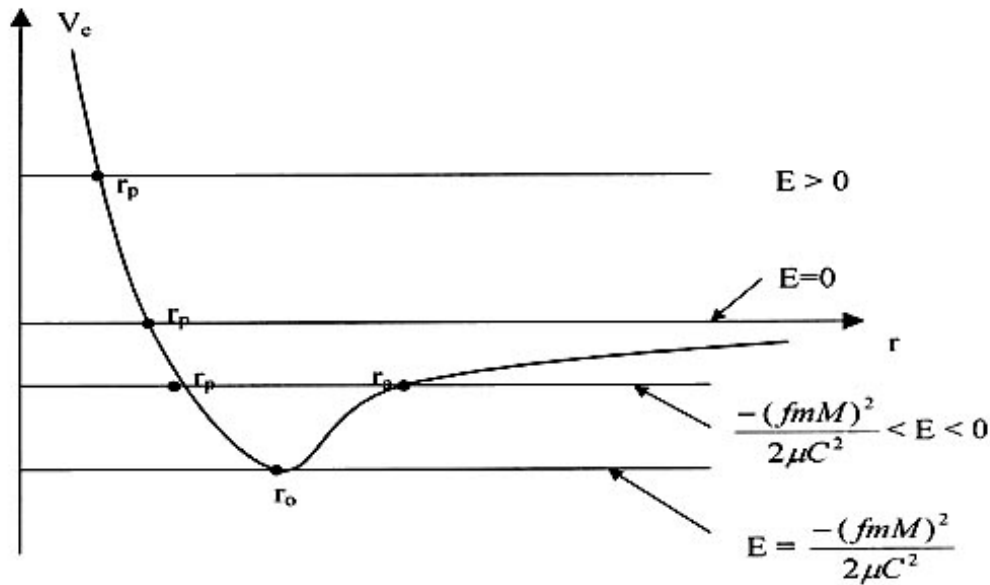
\* Pentru a caracteriza traiectoriile în cazul mișcării kepleriene, putem folosi aceeași tehnică „energetică” prezentată în capitolul 7. Astfel, pornim de la studiul integralei prime a energiei totale:

$$(10.10) \quad \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_e = E = \text{const.} ,$$

unde energia potențială efectivă are expresia:

$$V_e(r) = -\frac{fmM}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2} .$$

Energia potențială efectivă  $V_e$  este reprezentată în *Figura 10.2*.



**Figura 10.2**

Din (10.10) rezultă că:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_e(r))},$$

ecuație diferențială similară cu ecuația (9.6). În acest caz,  $V_e(r)$  va avea un punct de minim pentru  $r^* = \frac{\mu C^2}{fmM}$ , având aici valoarea  $-\frac{(fmM)^2}{2\mu C^2} < 0$  și va tinde la zero cu  $r$  tinzând la infinit.

Cu ajutorul figurii 10.2 putem analiza comportamentul traiectoriei.

1) Dacă  $E > 0$  *traiectoria* va fi *hiperbolică*.

Punctul  $P$  vine de la infinit, atinge pericentrul  $r_p$  și se întoarce la infinit. Orbita este deschisă. Viteza radială maximă  $\dot{r}_{\max}$  va fi atinsă în punctul  $r^*$ , unde energia potențială efectivă are un minim. La infinit el păstrează o viteză „reziduală” nenulă  $\dot{r}_{\infty} = \sqrt{\frac{2E}{\mu}}$ .

2) Dacă  $E = 0$  *traiectoria* va fi *parabolică*.

Comportamentul este similar cu cel din cazul traiectoriei hiperbolice, viteza radială fiind mai mică, iar viteza „reziduală” la infinit este nulă. Orbita parabolică este orbita deschisă la cel mai scăzut nivel al energiei potențiale efective. Ea va fi parcursă cu viteza

$$\text{de mărime } v = \sqrt{\frac{2f(m+M)}{r}}.$$

3) Dacă  $0 < E < -\frac{(fmM)^2}{2\mu C^2}$  *traectoria* va fi *eliptică*.

În acest caz orbita va fi închisă, mișcarea fiind periodică între  $r_p$  și  $r_a$ .

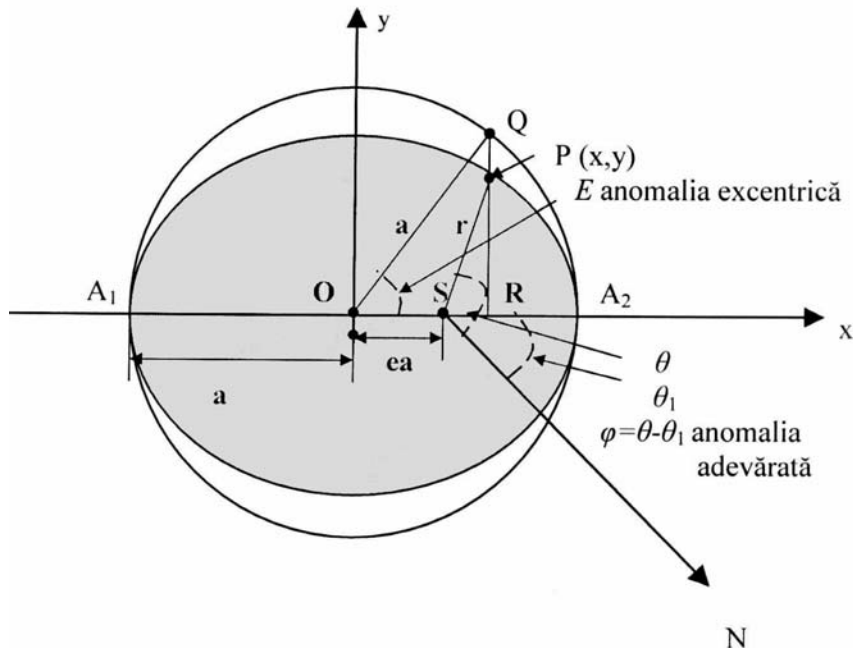
4) Dacă  $E = -\frac{(fmM)^2}{2\mu C^2}$  *traectoria* va fi *circulară*.

Ea va fi parcursă cu viteza de mărime  $v = \sqrt{\frac{f(m+M)}{r^*}}$ .

- În cazul mișcării eliptice ( $0 < e < 1$ ) semi-axele elipsei au valorile:

$$(10.11) \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2}(r_a + r_p) = \frac{p}{1-e^2} \\ b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}. \end{cases}$$

Pentru a rezolva complet problema mișcării kepleriene trebuie dedusă *legea timpului* în descrierea orbitei eliptice. Vom nota cu unghiul  $\varphi = \theta - \theta_1$  *anomalia adevărată* și cu unghiul  $E$  *anomalia excentrică* (vezi Figura 10.3).



**Figura 10.3**

Deoarece  $SR = OR - OS$ , rezultă că :



$$(10.12) \quad r \cos \varphi = a(\cos E - e).$$

Din ecuația elipsei  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , avem:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = b \sin E ,$$

unde am ținut cont de coordonatele punctului  $P(x, y)$ :

$$x = a \cos E, \quad y = r \sin \varphi .$$

Prin urmare, obținem:

$$(10.13) \quad r \sin \varphi = a \sqrt{1 - e^2} \sin E .$$

Eliminând unghiul  $\varphi$  între (10.12) și (10.13), rezultă:

$$(10.14) \quad r = a(1 - e \cos E) .$$

Din (10.12) și (10.14) avem:

$$(10.15) \quad r \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{2} + \frac{a}{2} \left( 2 \cos^2 \frac{E}{2} - 1 - e \right) = a(1 - e) \cos^2 \frac{E}{2} .$$

Pe de altă parte, (10.13) se mai poate scrie sub forma:

$$(10.16) \quad r \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = a \sqrt{1 - e^2} \sin \frac{E}{2} \cos \frac{E}{2} .$$

Împărțind relația (10.16) la (10.15), obținem legătura dintre anomalia adevărată  $\varphi$  și anomalia excentrică  $E$ :

$$(10.17) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} .$$

Dacă vom deriva (10.17) în raport cu timpul și vom folosi (10.15), rezultă:

$$r \dot{\varphi} = r \dot{\theta} = a \sqrt{1 - e^2} \dot{E} = b \dot{E} .$$

Din integrala ariilor și (10.14) obținem:

$$(10.18) \quad C = r^2 \dot{\theta} = r^2 \dot{\varphi} = r \cdot b \dot{E} = ab(1 - e \cos E) \dot{E} .$$

În fine, integrând relația (10.18) în raport cu timpul  $t$ , deducem *ecuația lui Kepler*:

$$(10.19) \quad E - e \sin E = n(t - t_0) = T, \quad ,$$

$$\text{unde } n = \frac{C}{a^2 \sqrt{1-e^2}} = \frac{\sqrt{f(m+M)}}{a^{3/2}}.$$

Se vede ușor că ecuația lui Kepler are soluție unică. Într-adevăr, notând cu:

$$f(E) = E - e \sin E, \quad ,$$

deoarece  $0 < e < 1$ , funcția  $f$  rezultă strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ . Cum  $f$  este continuă pe  $\mathbf{R}$  și  $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ , atunci rezultă că funcția  $f$  este bijectivă pe  $\mathbf{R}$ . Prin urmare, ecuația  $f(E) = T$  va avea soluție unică.

Din relația (10.17) se vede că dacă  $\varphi$  variază cu  $2\pi$ , atunci și  $E$  variază cu  $2\pi$ . Din ecuația lui Kepler (10.19) rezultă *perioada mișcării eliptice*:

$$(10.20) \quad T_0 = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi ab}{C} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{f(m+M)}}.$$

De aici, obținem *legea a treia a lui Kepler*:

$$(10.21) \quad \frac{T_0^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 b^2}{C^2 a} = \frac{4\pi^2}{f(m+M)} = \text{const.}$$

Prima lege a lui Kepler este dată de ecuația conice (10.1), în timp ce a doua lege se referă la legea ariilor (vezi Capitolul 6).

• **Exerciții și probleme:**

1) Pornind de la legile lui Kepler să se deducă forma forței de atracție universală.

2\*) În cazul mișcării hiperbolice, utilizând relația  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{E}{2}$ , să se obțină ecuația timpului sub forma  $e \operatorname{sh} E - E = n_1(t - t_0)$ ,  $n_1 = \frac{\sqrt{f(m+M)}}{a^{3/2}}$ .

3) În cazul mișcării parabolice, să se deducă ecuația timpului sub forma

$$\frac{p^2}{2} \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2} \right) = C(t - t_0).$$

4\*) Să se studieze problema interacțiunii Pământului, având formă sferică, cu masa  $M$  uniform distribuită, cu un satelit asimilat unui punct material de masă  $m$ . Raza Pământului este  $R = 6.380$  km. Satelitul se desprinde de racheta purtătoare la înălțimea  $H$ , față de suprafața Pământului, măsurată pe verticala locului, în punctul  $P_0$  având vector de poziție  $\mathbf{x}_0$ , cu viteze inițială  $\mathbf{v}_0$ . Presupunem că masa satelitului rămâne constantă în timpul evoluției de la suprafața Pământului până în  $P_0$ . În plus, presupunem că raportul  $m/M$  poate fi neglijat.

În particular, dacă lansarea ar avea loc de pe suprafața Pământului ( $H=0$ ) și dacă unghiul dintre  $\mathbf{x}_0$  și  $\mathbf{v}_0$  ar fi  $\pi/2$ , să se deducă valorile primei viteze cosmice și a celei de-a doua viteze cosmice.

### Sisteme neinertiale. Mișcarea relativă

- Până în prezent am studiat mișcarea sistemelor materiale în raport cu sistemele inerțiale (*mișcarea absolută*). În acest capitol vom considera mișcarea punctului material și a sistemelor de puncte materiale în raport cu sisteme neinertiale, care au fie o translație ne-uniformă, fie execută o rotație, față de un reper inerțial (*mișcarea relativă*). Prezentarea urmează monografia [2].

Fie  $k$  un reper inerțial, presupus a fi *fix* și  $k'$  un reper neinerțial, *mobil* față de  $k$ . Fie  $\mathbf{x}$  vectorul de poziție al unui punct arbitrar  $P$ , în raport cu reperul  $k$ , respectiv  $\mathbf{x}'$  vectorul său de poziție, în raport cu reperul  $k'$ . Vom presupune că reperele  $k$  și  $k'$  au o structură de spații vectoriale euclidiene orientate.

Numim *mișcare* a reperului  $k'$  în raport cu reperul  $k$  o funcție  $M_t : k' \rightarrow k$ , derivabilă în raport cu parametrul  $t \in \mathbf{R}$ , care invariază metrica și orientarea spațiului (adică, produsul scalar și produsul vectorial).

O mișcare  $M_t$  definește o *mișcare de rotație*, dacă  $M_t$  este un operator ortogonal, care face ca originea  $O'$  a reperului  $k'$  să corespundă originii  $O$  a reperului  $k$ . Următorul rezultat este cunoscut din cursul de Geometrie din anul I (vezi lucrarea [13]).

#### Teorema 11.1

Orice mișcare  $M_t$  se descompune, în mod unic, într-o rotație  $R_t : k' \rightarrow k$  și o translație  $T_t : k \rightarrow k$ :

$$M_t = T_t R_t$$

unde  $T_t \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0(t)$ ,  $\mathbf{x}_0(t) = \overrightarrow{OO'} \in k$ .

#### Demonstrație:

Vom nota cu  $\mathbf{x}_0(t) = M_t(\mathbf{0}')$ ,  $R_t = T_t^{-1} M_t$ .

Atunci  $R_t(\mathbf{0}') = T_t^{-1}(M_t(\mathbf{0}')) = T_t^{-1} \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  ■

O mișcare  $M_t$  definește o *mișcare de translație* dacă funcția  $R_t : k' \rightarrow k$  care îi corespunde, conform teoremei precedente, *nu* depinde de timp,  $R_t = R = \text{const}$ . Rezultă că în acest caz mișcarea va avea forma:

$$M_t \mathbf{x}' = T_t(R\mathbf{x}') = R\mathbf{x}' + \mathbf{x}_0(t).$$

În general, dacă  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{x}'$  reprezintă vectorii de poziție ai punctului  $P$  în raport cu reperul „fix”  $k$ , respectiv cu reperul „mobil”  $k'$ , presupunem că există o mișcare  $M_t$ , astfel ca:

$$(11.1) \quad \mathbf{x}(t) = M_t \mathbf{x}'(t) = R_t \mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}_0(t).$$

Este util să observăm că vectorul  $R_t \mathbf{x}' \in k$  *nu* coincide cu vectorul  $\mathbf{x}' \in k'$ , dat fiindcă sunt situați în spații diferite.

- Pentru a obține *legea de compunere a vitezelor* în mișcarea relativă vom deriva relația (11.1) în raport cu timpul  $t$ , obținând:

$$(11.2) \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{R}_t \mathbf{x}' + R_t \dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{x}}_0.$$

Pentru a interpreta cei trei termeni ce apar în relația (11.2) vom considera trei cazuri particulare.

1) *Cazul mișcării de translație* ( $\dot{R}_t = 0$ )

Relația (11.2) devine în acest caz:

$$\dot{\mathbf{x}} = R\dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{x}}_0,$$

sau, notând cu  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \in k$  *viteza absolută*, cu  $\mathbf{v}' = R_t \dot{\mathbf{x}}' \in k$  *viteza relativă* și cu  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{x}}_0 \in k$  *viteza originii sistemului mobil*, legea de compunere a vitezelor se va scrie:

$$(11.3) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0.$$

2) *Cazul mișcării de rotație a sistemului  $k'$  în raport cu  $k$  ( $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ), cu punctul  $P$  solidar legat de  $k'$  ( $\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{0}$ ).*

În acest caz distribuția de viteze (11.2) va avea forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{R}_t \mathbf{x}' .$$

**Teorema 11.2 (formula lui Poisson)**

Pentru orice moment de timp  $t$  există un vector  $\boldsymbol{\omega}(t) \in k$ , numit viteză unghiulară instantanee, astfel încât să avem formula:

$$(11.4) \quad \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} .$$

**Demonstrație:**

Cum în acest caz  $\mathbf{x} = R_t \mathbf{x}'$  și  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{R}_t \mathbf{x}'$ , rezultă că  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{R}_t R_t^{-1} \mathbf{x} = A \mathbf{x}$ . Operatorul  $A : k \rightarrow k$ , definit de  $A \mathbf{x} = \dot{R}_t R_t^{-1} \mathbf{x}$ , este liniar, deoarece  $R_t$  este liniar.

În plus,  $A$  este un operator antisimetric ( $A + A^T = 0$ ). Într-adevăr, deoarece operatorul  $R_t : k' \rightarrow k$  este ortogonal, rezultă că  $R_t^T = R_t^{-1} : k \rightarrow k'$ . Derivând expresia  $R_t R_t^T = \mathbf{1}_k$  în raport cu  $t$  obținem  $\dot{R}_t R_t^T + R_t \dot{R}_t^T = \dot{R}_t R_t^{-1} + (\dot{R}_t R_t^{-1})^T = 0$ . Deci,  $A + A^T = 0$ .

Pe de altă parte, se știe că operatorii antisimetrice definiți pe  $\mathbf{R}^3$  cu valori în  $\mathbf{R}^3$  sunt determinați de trei elemente nenule. În coordonate carteziane avem reprezentarea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Cu aceste notații, putem defini vectorul viteză unghiulară  $\boldsymbol{\omega}$  prin relația  $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$ , unde  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,3}$  sunt versorii bazei ortonormate. Aplicând operatorul  $A$  vectorului  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$  rezultă ușor că:

$$A \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad \blacksquare$$

3) *Cazul mișcării generale de rotație.*

În acest caz presupunem că reperul  $k'$  este în rotație față de reperul  $k$  ( $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ) și că punctul  $P$  se mișcă în raport cu reperul  $k'$  ( $\dot{\mathbf{x}}' \neq \mathbf{0}$ ). Din (11.2) rezultă:

$$(11.5) \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{R}_t \mathbf{x}' + R_t \dot{\mathbf{x}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + R_t \dot{\mathbf{x}}' .$$

Dacă vom nota prin  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \in k$  viteza absolută, cu  $\mathbf{v}' = R_t \dot{\mathbf{x}}' \in k$  viteza relativă și cu  $\mathbf{v}_{tr} = \dot{R}_t \mathbf{x}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \in k$  viteza de transport (datorată rotației), obținem distribuția vitezelor în mișcarea generală de rotație:

$$(11.6) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{tr} + \mathbf{v}' .$$

4) *Cazul general, al unei mișcări de rototranslație a reperului  $k'$  în raport cu reperul  $k$  și cu punctul  $P$  aflat în mișcare față de  $k'$ .*

Din formula (11.2), ținând cont de cazurile precedente, putem deduce că:

$$(11.7) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr} + \mathbf{v}_0 ,$$

unde  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \in k$  este viteza absolută,  $\mathbf{v}' = R_t \dot{\mathbf{x}}' \in k$  este viteza relativă,  $\mathbf{v}_{tr} = \dot{R}_t \mathbf{x}' = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in k$  este viteza de transport (datorată rotației), iar  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{x}}_0 \in k$  este viteza originii sistemului mobil.

Pentru a obține distribuția accelerațiilor în mișcarea relativă vom deriva relația (11.7) în raport cu timpul. Preliminar acestui calcul vom stabili forma vitezei de transport  $\mathbf{v}_{tr}$  în reperul  $k'$ . Fie vectorul  $\mathbf{X} \in k'$ , solidar cu reperul mobil. Atunci, având de-a face cu o rotație, rezultă:

$$\mathbf{x} = R_t \mathbf{X}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{R}_t \mathbf{X} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = (R_t \boldsymbol{\omega}' \times R_t \mathbf{X}) = R_t (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{X}),$$

unde  $\boldsymbol{\omega}' \in k'$  este viteza unghiulară raportată la reperul  $k'$ . Aici am folosit faptul că rotația  $R_t$  conservă produsul vectorial. Deci:

$$(11.8) \quad \dot{R}_t \mathbf{X} = R_t (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{X}) , \quad \mathbf{X} \in k'$$

reprezintă formula lui Poisson în funcție de vectori din reperul mobil  $k'$ .

Folosind formula precedentă, distribuția de accelerații în mișcarea relativă va rezulta după cum urmează:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= R_t \mathbf{x}' + \mathbf{x}_0, & \dot{\mathbf{x}} &= R_t \dot{\mathbf{x}}' + R_t \dot{\mathbf{x}}_0 = R_t (\dot{\mathbf{x}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}') + \dot{\mathbf{x}}_0, \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \dot{R}_t (\dot{\mathbf{x}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}') + R_t (\ddot{\mathbf{x}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{x}' + \boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}}') + \ddot{\mathbf{x}}_0 = \\ &= R_t [\boldsymbol{\omega}' \times (\dot{\mathbf{x}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}') + \ddot{\mathbf{x}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{x}' + \boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}}'] + \ddot{\mathbf{x}}_0 = \\ &= R_t [\ddot{\mathbf{x}}' + 2\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}}' + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{x}'] + \ddot{\mathbf{x}}_0.\end{aligned}$$

Pentru obținerea acestor egalități am folosit formula (11.8), odată cu  $\mathbf{X} = \mathbf{x}' \in k'$ , pentru viteze, și apoi, cu  $\mathbf{X} = \dot{\mathbf{x}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}' \in k'$ , pentru accelerații.

Dacă vom nota cu  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}$  accelerația absolută,  $\mathbf{a}' = R_t \ddot{\mathbf{x}}'$  accelerația relativă,  $\mathbf{a}_{tr} = R_t [\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{x}']$  accelerația de transport (datorată rotației),  $\mathbf{a}_C = 2R_t \boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{x}}'$  accelerația Coriolis, respectiv cu  $\mathbf{a}_0 = \ddot{\mathbf{x}}_0$  accelerația originii sistemului mobil, obținem distribuția accelerațiilor în mișcarea relativă, sub forma:

$$(11.9) \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_C + \mathbf{a}'.$$

Este bine să remarcăm că această formulă are loc în reperul inerțial  $k$ .

Deoarece ecuația de mișcare a lui Newton  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$  este valabilă în reperul inerțial  $k$ , din (11.9) deducem ecuația mișcării relative a unui punct material  $P$ :

$$(11.10) \quad m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 - m\mathbf{a}_{tr} - m\mathbf{a}_C = \mathbf{F} + \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{tr} + \mathbf{F}_C.$$

Aici, am notat cu  $\mathbf{F}_0 = -m\mathbf{a}_0$  forța de inerție (datorată translației reperului mobil),  $\mathbf{F}_{tr} = -m\mathbf{a}_{tr}$  forța de transport (datorată rotației reperului mobil) și  $\mathbf{F}_C = -m\mathbf{a}_C$  forța Coriolis. Aceste forțe se numesc *forțe complementare (inerțiale)* și sunt percepute doar de un observator aflat în reperul mobil.

Condiția de echilibru relativ la reperul  $k'$  se obține din (11.10), pentru  $\mathbf{a}' = \mathbf{v}' = \mathbf{0}$ , sub forma:

$$(11.11) \quad \mathbf{F} + \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{tr} = \mathbf{0}.$$



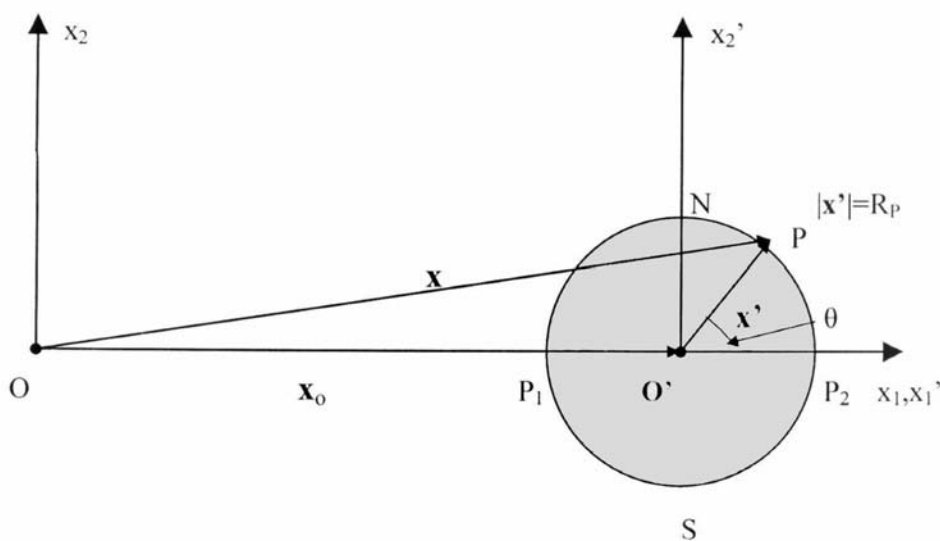
- În continuare vom studia mișcarea relativă în raport cu două repere inerțiale importante în mecanica cerească.

a) *Sistemul inerțial heliocentric.*

În acest caz reperul inerțial  $k$  va avea originea în centrul Soarelui, în timp ce reperul neinerțial  $k'$  va avea originea în centrul Pământului și va avea o mișcare de translație, astfel ca axele sale să rămână paralele cu cele ale sistemului inerțial  $k$ .

Deci,  $\dot{R}_i = 0$ , sau  $R_i = R = \text{const.} = \mathbf{1}_3$ . Acest caz exprimă efectul *mișcării de revoluție* a Pământului în jurul Soarelui, asupra unui punct aflat pe suprafața Pământului.

Fie  $P$  un punct aflat pe suprafața Pământului,  $O$  centrul Soarelui,  $O'$  centrul Pământului,  $Ox_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , axele sistemului inerțial  $k$ ,  $O'x'_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , axele sistemului neinerțial astfel ca direcția  $Ox_1$  să coincidă cu  $O'x'_1$ , iar  $O'x'_2$  să fie paralelă cu  $Ox_2$  (vezi *Figura 11.1*).



**Figura 11.1**

Ecuția mișcării relative, pentru această problemă, va avea forma:

$$(11.12) \quad m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 \quad ,$$

unde  $\mathbf{F} = -f \frac{mM}{r^3} \mathbf{x}$  exprimă atracția Soarelui asupra punctului  $P$ . Aici  $r = |\mathbf{x}|$ ,  $m$  este masa Pământului și  $M$  masa Soarelui. În plus, avem relația  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'$ . Accelerația centrului Pământului în mișcare de translație în jurul Soarelui va fi:

$$(11.13) \quad \mathbf{a}_0 = -\frac{fM}{r_0^3} \mathbf{x}_0, \quad ,$$

cu  $r_0 = |\mathbf{x}_0|$ . Din (11.12) și (11.13) obținem:

$$\mathbf{a}' = -\frac{fM}{r^3} (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}') + \frac{fM}{r_0^3} \mathbf{x}_0 = fM \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) \mathbf{x}_0 - \frac{fM}{r^3} \mathbf{x}'.$$

Proiectând această relație pe axele sistemului mobil, rezultă:

$$(11.14) \quad \begin{cases} a'_1 = fM \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) r_0 - \frac{fM}{r^3} R_p \cos \theta \\ a'_2 = -\frac{fM}{r^3} R_p \sin \theta \end{cases},$$

unde  $R_p = |\mathbf{x}'|$  este raza Pământului. Folosind teorema cosinusului în triunghiul  $OO'P$ ,  $r^2 = r_0^2 + R_p^2 + 2r_0 R_p \cos \theta$ , vom obține:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} \left( 1 + \frac{R_p^2}{r_0^2} + 2 \frac{R_p}{r_0} \cos \theta \right)^{-3/2} = \frac{1}{r_0^3} \left( 1 - 3 \frac{R_p}{r_0} \cos \theta + \dots \right).$$

Deci, formulele (11.14) vor avea forma:

$$(11.15) \quad \begin{cases} a'_1 = \frac{fMR_p}{r_0^3} (2 \cos \theta + \dots) \\ a'_2 = -\frac{fMR_p \sin \theta}{r_0^3} \left( 1 - 3 \frac{R_p}{r_0} \cos \theta + \dots \right) \end{cases}.$$

Neglijând termenii de ordin  $\left(\frac{R_P}{r_0}\right)^k$ ,  $k \geq 2$ , cu formulele (11.15)

putem explica apariția *fenomenului mareelor*.

Astfel, dacă punctul  $P$  va aparține unei mase fluide aflate la suprafața Pământului, formulele (11.15) exprimă accelerația imprimată de Soare asupra acestei particule. Pentru  $\theta \in \{0, \pi\}$  (la Ecuator) accelerația  $a'_1$  va lua valorile extreme  $\pm 2 \frac{fMR_P}{r_0^3}$ , în timp ce  $a'_2$  va fi nulă. Pentru  $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

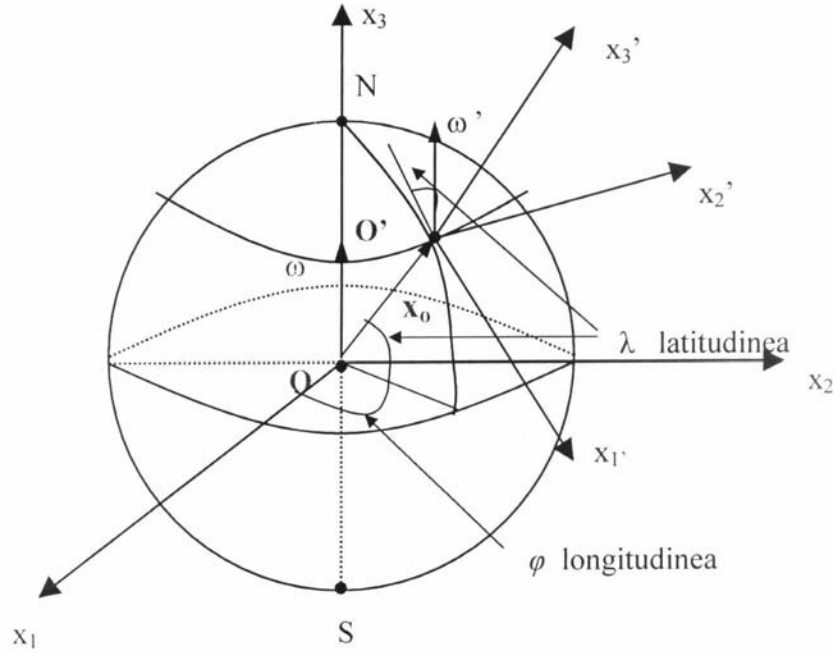
(la Poli) accelerația  $a'_2$  va lua valorile extreme  $\pm \frac{fMR_P}{r_0^3}$ . Mareele se

produc de două ori în decurs de 24 de ore, o dată când Soarele trece la meridianul locului și o dată când el trece la meridianul opus.

Efectul datorat atracției Lunii asupra punctului  $P$ , aflat pe suprafața Pământului, poate fi studiat în mod similar, dacă înlocuim masa Soarelui cu masa Lunii și distanța Pământ - Soare cu distanța Pământ - Lună. Se obține rezultatul că mărimea forței de atracție a lunii este de 2,32 ori mai mare decât cea datorată Soarelui (vezi [6]).

b) *Sistemul inerțial geocentric.*

În acest caz reperul inerțial  $k$  va avea originea în centrul Pământului, cu axa  $Ox_3$  orientată după axa polilor  $S-N$  și cu axele  $Ox_1$  și  $Ox_2$  situate în planul ecuatorial. Reperul neinerțial, mobil,  $k'$  va fi situat pe suprafața Pământului. El va fi solidar cu Pământul aflat în mișcarea de rotație, în jurul axei polilor, cu viteza unghiulară  $\omega$  (vezi *Figura 11.2*). Axa  $O'x'_3$  va fi dirijată după verticala ascendentă a locului,  $O'x'_1$  după tangenta la meridianul locului spre Sud, iar  $O'x'_2$  după tangenta la paralela locului spre Est (pentru un reper mobil aflat în emisfera nordică a Pământului).



**Figura 11.2**

Pământul este presupus a fi sferic, raza sa fiind  $R_p = 6380km$ , iar mărimea vitezei sale de rotație  $\omega' = |\omega'| = 0,729 \cdot 10^{-4} rad/s$ , presupusă a fi constantă în timp.

Ecuția mișcării relative a unui punct  $P$ , aflat în vecinătatea suprafeței terestre, va fi dată de (11.10). Vom studia separat influența diverselor forțe complementare ce acționează asupra punctului  $P$ , în raport cu reperul  $k'$ . Dacă punctul  $P$  va coincide cu  $O'$  ( $\mathbf{x}' = 0$ ) atunci forța de transport datorată rotației  $\mathbf{F}_{tr}$  va fi nulă, iar forța de inerție  $\mathbf{F}_0$  va avea, în reperul mobil  $k'$ , componentele:

$$(11.16) \quad \begin{cases} F_0^{x'_1} = mR_p \omega'^2 \cos \lambda \sin \lambda \\ F_0^{x'_2} = 0, \quad F_0^{x'_3} = mR_p \omega'^2 \cos^2 \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Componenta  $F_0^{x'_3}$  are tendința de a micșora greutatea corpurilor. Ea are valoarea maximă la Ecuator ( $\lambda = 0$ ) și este nulă la poli ( $\lambda = \pi/2$ ). Componenta  $F_0^{x'_1}$  abate direcția verticalei locului (determinată cu un fir cu plumb) spre Sud (în

emisfera nordică,  $\lambda > 0$ ) și spre Nord (în emisfera sudică,  $\lambda < 0$ ). Valoarea ei este maximă la latitudinea  $\lambda = \pi/4$ .

Pentru a studia *influența forței Coriolis*, vom presupune că viteza de rotație a Pământului este constantă ( $\dot{\omega}' = 0$ ) și mică. Astfel, vom neglija termenii ce conțin puterile  $|\omega'|^k$ ,  $k \geq 2$ . În aceste ipoteze, ecuațiile mișcării relative ale unui punct  $P$ , aflat sub acțiunea greutății și a forței Coriolis, în proiecție pe axele reperului mobil  $k'$ , vor avea forma:

$$(11.17) \quad \begin{cases} \ddot{x}'_1 = 2\omega'\dot{x}'_2 \sin \lambda \\ \ddot{x}'_2 = -2\omega'(\dot{x}'_1 \sin \lambda + \dot{x}'_3 \cos \lambda) \\ \ddot{x}'_3 = -g + 2\omega'\dot{x}'_2 \cos \lambda \end{cases}$$

Vom presupune că la momentul inițial  $t = t_0$  poziția și viteza punctului  $P$  vor fi:

$$(11.18) \quad \begin{cases} x'_1(t_0) = x'_2(t_0) = 0, & x'_3(t_0) = h \\ \dot{x}'_1(t_0) = u_0, & \dot{x}'_2(t_0) = v_0, & \dot{x}'_3(t_0) = w_0 \end{cases}$$

Integrând sistemul diferențial (11.17) o dată și folosind condițiile inițiale corespunzătoare, obținem:

$$(11.19) \quad \begin{cases} \dot{x}'_1 = 2\omega'x'_2 \sin \lambda + u_0 \\ \dot{x}'_2 = -2\omega'(\dot{x}'_1 \sin \lambda + x'_3 \cos \lambda) + v_0 + 2\omega'h \cos \lambda \\ \dot{x}'_3 = 2\omega'x'_2 \cos \lambda - gt + w_0 \end{cases}$$

Introducând prima și ultima ecuație din (11.19) în cea de-a doua ecuație a sistemului (11.17), neglijând termenii  $|\omega'|^k$ ,  $k \geq 2$ , rezultă ecuația diferențială în  $x'_2$ :

$$(11.20) \quad \ddot{x}'_2 + 2\omega'(u_0 \sin \lambda + w_0 \cos \lambda) - 2\omega'gt \cos \lambda = 0.$$

Integrând ecuația (11.20) de două ori în raport cu timpul  $t$ , obținem:

$$(11.21) \quad x'_2 = v_0 t - \omega' t^2 (u_0 \sin \lambda + w_0 \cos \lambda) + \frac{1}{3} \omega' g t^3 \cos \lambda.$$

În fine, din relația (11.21) și din prima și ultima ecuație a sistemului (11.19), rezultă:

$$(11.22) \quad \begin{cases} x'_1 = u_0 t + \omega' v_0 t^2 \sin \lambda \\ x'_3 = h + w_0 t + \omega' v_0 t^2 \cos \lambda - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Dacă, în particular, lăsăm punctul material greu să cadă fără viteză inițială ( $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ ), de la înălțimea  $h$ , el va ajunge în planul  $O'x'_1x'_2$  după intervalul de timp:

$$(11.23) \quad t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} ,$$

în punctul de coordonate locale:

$$(11.24) \quad x'_1 = x'_3 = 0, \quad x'_2 = \frac{2}{3} \omega' h \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos \lambda .$$

Semnul pozitiv al lui  $x'_2$  indică faptul că punctul aflat în cădere a fost deviat spre Est. În concluzie, un punct material aflat în cădere liberă, sub acțiunea greutateii și a forței Coriolis va descrie un arc de parabolă semicubică, dat de ecuațiile parametrice:

$$(11.25) \quad \begin{cases} x'_1 = 0 \\ x'_2 = \frac{1}{3} \omega' g t^3 \cos \lambda \\ x'_3 = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

- În ultima parte a acestui capitol vom studia *mișcarea relativă a unui sistem discret* alcătuit din  $n$  puncte materiale. Fie  $k$  un sistem inerțial centrat în punctul  $O$ , de axe ortogonale  $Ox_i$ ,  $i = \overline{1,3}$  și  $k'$  un sistem neinerțial care se deplasează prin translație față de  $k$ , având centrul în punctul  $G$ , care este centrul de masă al sistemului, și axe ortogonale  $Gx'_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ . După cum am văzut mai sus, în acest caz rotația sistemului  $k'$  față de  $k$  poate fi aleasă astfel

ca  $R_i = R = \text{const.} = \mathbf{1}_3$ . Cu alte cuvinte, reperul  $k'$  se deplasează cu axele paralele cu axele sistemului  $k$ . În acest caz reperul  $k'$  se numește *reper Koenig*. În aceste ipoteze, relația (11.1) devine:

$$(11.26) \quad \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}'_i(t) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad \forall \quad i = \overline{1, n}$$

unde  $\boldsymbol{\xi}(t)$  este vectorul de poziție al centrului de masă  $G$ , al sistemului de  $n$  puncte materiale, în raport cu reperul  $k$ . Prin urmare, relația de compunere a vitezelor, va rezulta sub forma:

$$(11.27) \quad \dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{x}}'_i + \dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad \forall \quad i = \overline{1, n}.$$

Dar, deoarece  $G = O'$  este originea reperului mobil, vom avea relațiile:

$$(11.28) \quad \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}'_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}'_i = \mathbf{0}.$$

Din (11.27) și (11.28) rezultă *impulsul* sistemului discret de puncte materiale:

$$(11.29) \quad \mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}_i = \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \dot{\boldsymbol{\xi}} + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}'_i = M \dot{\boldsymbol{\xi}},$$

unde  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  este *masa totală* a sistemului.

În mod analog, vom calcula *momentul cinetic* al sistemului discret de puncte materiale, în raport cu polul  $O$ :

$$(11.30) \quad \begin{aligned} \mathbf{K}_O &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times (m_i \dot{\mathbf{x}}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}'_i + \boldsymbol{\xi}) \times m_i (\dot{\mathbf{x}}'_i + \dot{\boldsymbol{\xi}}) = \\ &= M \boldsymbol{\xi} \times \dot{\boldsymbol{\xi}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{x}'_i \times (m_i \dot{\mathbf{x}}'_i) + \underbrace{\boldsymbol{\xi} \times \left( \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}'_i \right)}_{=0} + \\ &\quad + \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}'_i \right)}_{=0} \times \dot{\boldsymbol{\xi}} = M \boldsymbol{\xi} \times \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K}'_G. \end{aligned}$$

În mod analog, obținem *energia cinetică* a sistemului discret de puncte materiale, în raport cu reperul  $k$ :

$$(11.31) \quad \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\mathbf{x}}'_i + \dot{\boldsymbol{\xi}})^2 = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}'^2_i + \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}'_i \right)}_{=0} = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 + T'. \end{aligned}$$

Am obținut, prin relațiile (11.30) și (11.31), următoarea teoremă.

### ***Teorema 11.3 (Koenig)***

*Momentul cinetic (respectiv, energia cinetică) al (a) unui sistem material discret, în raport cu polul  $O$  (respectiv, cu reperul  $k$ ), este egal(ă) cu suma dintre momentul cinetic (respectiv, energia cinetică) raportat(ă) la polul  $G$  (respectiv, la reperul  $k'$ ) și momentul cinetic (respectiv, energia cinetică) al (a) centrului de masă  $G$ , în care s-a concentrat întreaga masă a sistemului, în raport cu polul  $O$  (respectiv, cu reperul  $k$ ).*

La fel ca în capitolul 8, vom presupune că asupra sistemului  $\{P_i\}_{i=1, \overline{n}}$  acționează forțele exterioare  $\{\mathbf{F}_i\}_{i=1, \overline{n}}$  și forțele interioare  $\{\mathbf{F}_{ij}\}_{\substack{i, j=1, \overline{n} \\ i \neq j}}$ .

În continuare vom obține relația dintre lucrul mecanic elementar al acestui sistem de forțe, în raport cu reperul  $k$ , și lucrul mecanic elementar relativ la reperul  $k'$ . Astfel:

$$(11.32) \quad \begin{aligned} dL &= dL_{ext} + dL_{int} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{x}_i + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot (d\mathbf{x}'_i + d\boldsymbol{\xi}) + \\ &+ \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} \cdot (d\mathbf{x}'_i + d\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{x}'_i + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{x}'_i + \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right)}_{=\mathbf{R}} \cdot d\boldsymbol{\xi} + \\ &+ \underbrace{\left( \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} \right)}_{=\mathbf{0}} \cdot d\boldsymbol{\xi} = dL'_{ext} + dL'_{int} + \mathbf{R} \cdot d\boldsymbol{\xi} = dL' + \mathbf{R} \cdot d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$



Deoarece impulsul sistemului are forma (11.29), iar rezultanta forțelor exterioare  $\mathbf{R}$  este invariata de schimbarea de reper  $k \rightarrow k'$  prezentată, rezultă din teorema 8.1 că *teorema de mișcare a centrului de masă 8.2 rămâne valabilă în reperul Koenig*.

Dacă vom calcula momentul resultant  $\mathbf{M}_O$  al forțelor exterioare, în raport cu polul  $O$ , vom obține:

$$\begin{aligned}
 (11.33) \quad \mathbf{M}_O &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}'_i) \times \mathbf{F}_i = \\
 &= \boldsymbol{\xi} \times \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right) + \sum_{i=1}^n \mathbf{x}'_i \times \mathbf{F}_i = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}'_G .
 \end{aligned}$$

Din relațiile (11.30) și (11.33), aplicând teorema momentului cinetic 8.3, rezultă:

$$(11.34) \quad \dot{\mathbf{K}}_O = M\ddot{\boldsymbol{\xi}} \times \boldsymbol{\xi} + \dot{\mathbf{K}}'_G = \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}'_G .$$

Dar  $M\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{R}$ , de unde avem relația:

$$(11.35) \quad \dot{\mathbf{K}}'_G = \mathbf{M}_G .$$

Am obținut următorul rezultat important:

*Teorema momentului cinetic are loc într-un reper neinerțial de tip Koenig, sub forma (11.35).*

În fine, din (11.31) și (11.32), aplicând teorema energiei (8.4), avem relația:

$$\begin{aligned}
 (11.36) \quad dT &= dT' + M\dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot d\dot{\boldsymbol{\xi}} = dT' + M\ddot{\boldsymbol{\xi}} \cdot d\boldsymbol{\xi} = \\
 &= dT' + \mathbf{R} \cdot d\boldsymbol{\xi} = dL = dL' + \mathbf{R} \cdot d\boldsymbol{\xi} .
 \end{aligned}$$

Deci, rezultă:

$$(11.37) \quad dT' = dL' = dL'_{\text{int}} + dL'_{\text{ext}} .$$

Prin urmare, obținem rezultatul următor:

*Teorema energiei are loc într-un reper neinerțial de tip Koenig, sub forma (11.37).*

• **Exerciții și probleme:**

- 1) În cazul sistemului inerțial geocentric, să se obțină proiecțiile pe reperul mobil  $k'$  ale forței de inerție  $\mathbf{F}_0$ , date de relațiile (11.16).
- 2) În cazul sistemului inerțial geocentric, să se deducă proiecțiile pe axele sistemului mobil  $k'$  ale forței Coriolis  $\mathbf{F}_C$ , utilizate în ecuațiile (11.17).
- 3) În același caz, să se obțină soluțiile sistemului diferențial (11.17), (11.18), sub forma (11.22).
- 4) Un vapor pornește din punctul  $A$ , aflat pe malul unui fluviu a cărui apă curge uniform cu viteza  $v_0$ , înaintând uniform cu viteza având mărimea  $\frac{v_0}{\lambda}$ , față de apă, spre un punct  $B$ , aflat pe malul opus. Să se afle:
  - a) direcția vitezei relative a vaporului față de apă, atunci când traiectoria sa absolută este segmentul  $AB$ ;
  - b) traiectoria absolută și timpul de traversare, dacă viteza relativă a vaporului este constant îndreptată spre punctul  $B$ . Discuție după valorile parametrului  $\lambda$ .
- 5) Viteza unui râu de lățime  $2h$  este zero la mal și crește proporțional cu depărtarea de mal, ajungând la valoarea  $v_0$  la mijlocul râului. Un înotător traversează râul cu viteza relativă, de mărime  $\frac{v_0}{\lambda}$ , perpendiculară pe direcția curentului. Să se afle traiectoria înotătorului și locul unde acesta va atinge malul opus.
- 6) Un cerc de rază  $R$  se rotește uniform în jurul unui diametru al său. Punctul  $P$  se mișcă pe cerc cu o viteză relativă de mărime constantă, parcurgând tot cercul în timpul unei rotații complete a acestuia. Să se determine:
  - a) viteza și accelerația absolută ale punctului  $P$ ;
  - b) traiectoria absolută a lui  $P$ .

### ***Sisteme rigide. Unghiurile lui Euler. Cinematica rigidului. Cinetica rigidului***

- Numim *sistem rigid* un sistem material discret cu proprietatea că distanțele dintre două puncte arbitrare ale sale rămân constante în timp. Putem scrie această condiție sub forma:

$$(12.1) \quad |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = r_{ij} = \text{const.}, \quad \forall i, j = \overline{1, n},$$

unde  $\mathbf{x}_i$  și  $\mathbf{x}_j$  sunt vectorii de poziție a două puncte arbitrare  $P_i$  și  $P_j$  din sistemul rigid, raportați la un reper inerțial. După cum am văzut în capitolul 2 un sistem material discret, format din  $n$  puncte materiale, are  $3n$  grade de libertate (adică, mișcarea sa depinde de  $3n$  coordonate). În cazul unui rigid liber vom avea 6 grade de libertate, cu excepția sistemului rigid format din două puncte materiale care are 5 grade de libertate. Ultima afirmație este evidentă, având în vedere că două puncte au 6 coordonate, supuse legăturii (12.1). Deci, 5 grade de libertate.

În ceea ce privește sistemul rigid liber care are trei puncte necoliniare, lui îi putem asocia un reper solidar legat de rigid. Ori, se știe că un reper arbitrar din  $\mathbf{R}^3$  se obține dintr-un reper dat printr-o translație și o rotație, deci are 6 grade de libertate (vezi lucrarea [13]). Altfel spus, varietatea de configurație a unui sistem rigid este produsul cartezian  $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$ , al spațiului  $\mathbf{R}^3$  cu grupul rotațiilor proprii  $SO(3) = \{A \in M_3(\mathbf{R}) / AA^T = \mathbf{1}_3, \det A = 1\}$ . Fixând un punct al sistemului rigid, este evident că varietatea sa de configurație va fi  $SO(3)$ .

- După cum se știe, rotația unui sistem de coordonate în raport cu un sistem de coordonate dat se obține prin trei rotații în jurul unor axe predefinite. O alegere posibilă o reprezintă rotația dată de *unghiurile lui Euler*. Sistemul rotit este similar sistemului coordonatelor geografice de pe sferă, cu singularități la poli și multivocitate pe un meridian.

Mai precis, fie  $Ox_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , un sistem inerțial și  $Ox'_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$  un sistem neinertial, solidar cu rigidul aflat în rotație în jurul punctului  $O$ . Pentru a ajunge din reperul  $Ox_i$  în reperul  $Ox'_i$ , vom efectua trei rotații:

- 1) O rotație de unghi  $\psi$  în jurul axei  $Ox_3$ .

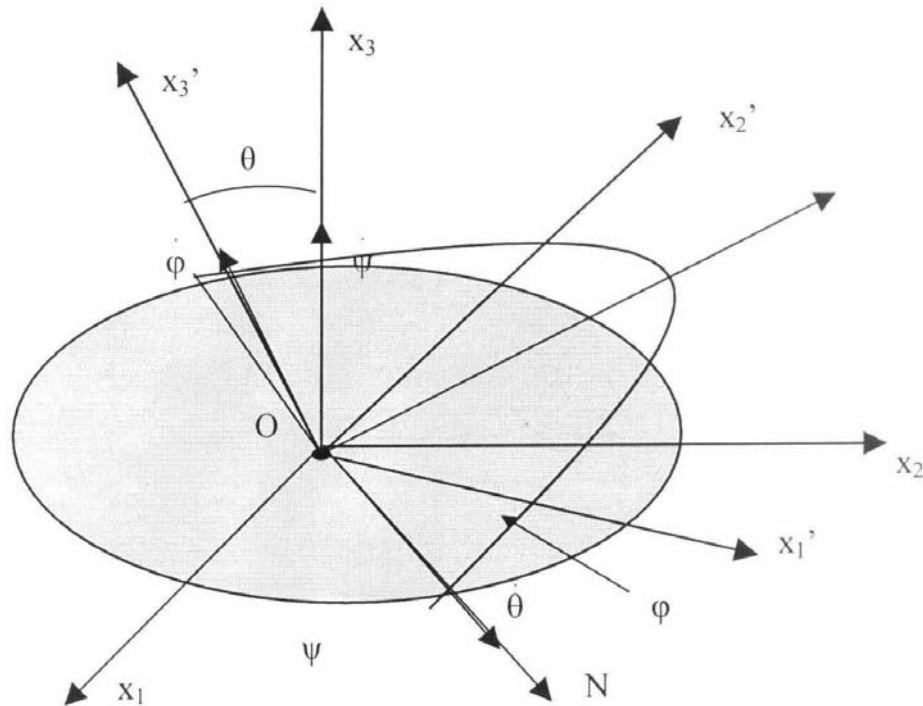
Astfel, axa  $Ox_3$  rămâne pe loc, iar  $Ox_1$  devine  $ON$  (axa nodurilor). Unghiul  $\psi$  se numește *precesie*.

2) O rotație de unghi  $\theta$  în jurul axei nodurilor  $ON$ .

Ea lasă axa  $ON$  pe loc și duce axa  $Ox_3$  în  $Ox'_3$ . Unghiul  $\theta$  se numește *nutație*.

3) O rotație de unghi  $\varphi$  în jurul axei  $Ox'_3$ .

Această rotație lasă neschimbată axa  $Ox'_3$  și transformă axa  $ON$  în  $Ox'_1$ . Unghiul  $\varphi$  se numește *rotație proprie*. (vezi Figura 12.1).



**Figura 12.1**

Matricial, vom scrie prima rotație, de unghi  $\psi$  în jurul lui  $Ox_3$ , sub forma:

$$(12.2) \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Aici  $\mathbf{e}$  reprezintă versorii sistemului inerțial  $Ox_i$ , iar  $\mathbf{k}$  reprezintă versorii sistemului rotit, cu  $\mathbf{k}_1 = \frac{\overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{ON}|}$  și  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{e}_3$ .

Apoi, rotim sistemul  $\mathbf{k}$ , în jurul lui  $ON$  cu unghiul  $\theta$ , ajungând la sistemul  $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{j}_3 \end{pmatrix}$ , în care  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{j}_1$ :

$$(12.3) \quad \mathbf{j} = B\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_3 \end{pmatrix}.$$

În fine, rotim reperul  $\mathbf{j}$  în jurul lui  $\mathbf{j}_3$  cu unghiul  $\varphi$ , pentru a obține reperul neinerțial  $\mathbf{e}' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}$ , în care  $\mathbf{j}_3 = \mathbf{e}'_3$ :

$$(12.4) \quad \mathbf{e}' = C\mathbf{j} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{j}_3 \end{pmatrix}.$$

Compunând cele trei rotații (12.2) – (12.4), obținem relațiile de trecere de la reperul inerțial la reperul rotit, solidar cu rigidul, sub forma:

$$(12.5) \quad \mathbf{e}' = C B A \mathbf{e}.$$

- Pentru a obține distribuția de viteze și de accelerații în mișcarea liberă a unui sistem rigid, vom considera un reper inerțial  $k$  fixat și un reper mobil  $k'$ , solidar legat de rigidul aflat în mișcare. În acest caz, formula (11.7) se reduce la următoarea distribuție de viteze:

$$(12.6) \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{R}_t \mathbf{x}' = \dot{\mathbf{x}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

deoarece viteza relativă  $\dot{\mathbf{x}}'$  este nulă.

În mod similar, din formula (11.9) deducem distribuția de accelerații, în mișcarea unui sistem rigid:

$$(12.7) \quad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_0 + R_t [\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{x}' + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}')] ,$$

acceleerația relativă și acceleerația Coriolis fiind nule. Reamintim faptul că formulele (12.6) și (12.7) sunt scrise în raport cu reperul inerțial  $k$ .

- În continuare vom deduce legătura dintre vectorul viteză unghiulară  $\boldsymbol{\omega}$  și unghiurile lui Euler. În prima parte a acestui capitol am arătat că rotația sistemului mobil  $k'$  în raport cu sistemul fix  $k$  este dată de trei rotații, date de unghiurile lui Euler, în jurul unor axe predefinite.

În general, să presupunem că avem de-a face cu o *rotație de unghi*  $\alpha$  în jurul unei axe  $Ox_3$  a unui reper inerțial dat. Atunci matricea de rotație  $R_t : k' \rightarrow k$  va avea forma:

$$(12.8) \quad R_t = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Folosind formula lui Poisson (11.4) pentru  $\mathbf{e}'_1$ , rezultă:

$$(12.9) \quad \dot{R}_t \mathbf{e}'_1 = R_t (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{e}'_1) = \lambda R_t (\mathbf{e}'_3 \times \mathbf{e}'_1) = \lambda R_t \mathbf{e}'_2 ,$$

pentru, dacă  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_3$ , aceeași formulă ne dă:

$$(12.10) \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 = R_t (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{e}'_3) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \lambda \mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\omega}' = \lambda \mathbf{e}'_3 ,$$

axa  $Ox_3$  fiind fixă.

Pe de altă parte, un calcul direct în (12.9) cu  $R_t$  dat de (12.8), ne arată că:

$$(12.11) \quad \lambda = \dot{\alpha}, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha} \mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\omega}' = \dot{\alpha} \mathbf{e}'_3 .$$

Aplicând acest rezultat general rotațiilor efectuate cu ajutorul unghiurilor lui Euler, rezultă că:

$$(12.12) \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{k}_1 + \dot{\phi} \mathbf{j}_3 ,$$

unde versorii  $\mathbf{k}_1$  și  $\mathbf{j}_3$  sunt proiectați pe reperul  $k$ . Mai precis, dacă folosim relațiile de transformare (12.2) și (12.3) obținem componentele vectorului viteză unghiulară  $\boldsymbol{\omega}$  pe reperul  $k$ , sub forma:

$$(12.13) \quad \begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_2 = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} .$$

Folosind relația (12.5) și matricile de trecere  $A, B, C$ , date de (12.2)-(12.4), rezultă componentele vectorului  $\boldsymbol{\omega}'$  pe reperul  $k'$ , sub forma:

$$(12.14) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega'_2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega'_3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{cases} .$$

Relațiile (12.13) și (12.14) sunt numite *ecuațiile cinematice ale lui Euler*.

- Revenind la distribuția de viteze (12.6) în mișcarea unui sistem rigid, vom consemna câteva caracteristici cinematice ale sistemelor rigide.

- 1) Dacă în relația (12.6) vectorul  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , rezultă că  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0$ , deci avem de-a face cu o *mișcare de translație* a sistemului rigid.
- 2) Dacă  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  (deci,  $\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ ), din (12.6) rezultă că  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{R}_t \mathbf{x}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ , deci avem de-a face cu o *mișcare de rotație*, în jurul punctului fix  $O$ . Dacă  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ , axa de rotație este variabilă în timp, având de-a face cu o *rotație instantanee*. Dacă direcția lui  $\boldsymbol{\omega}$  rămâne constantă în timp, avem o *rotație constantă*. Dacă mărimea lui  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $|\boldsymbol{\omega}|$ , este constantă în timp avem de-a face cu o *rotație uniformă*.

În cazul general al unei mișcări de rototranslație a sistemului rigid, din (12.6) obținem:

$$(12.15) \quad \dot{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{x}}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} ,$$

deci, proiecția vitezei  $\dot{\mathbf{x}}$  pe  $\boldsymbol{\omega}$  este aceeași pentru toate punctele sistemului rigid. Prin urmare, punctele în care viteza este minimă sunt acele puncte pentru care  $\dot{\mathbf{x}}$  este coliniar cu  $\boldsymbol{\omega}$ . Fie  $\mathbf{x}^*$  un astfel de punct. Din (12.6) rezultă:

$$(12.16) \quad \dot{\mathbf{x}}^* = \dot{\mathbf{x}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0) = \alpha \boldsymbol{\omega} ,$$

de unde înmulțind scalar cu  $\boldsymbol{\omega}$ , obținem:

$$(12.17) \quad \alpha = \frac{\dot{\mathbf{x}}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}^2} .$$

Relația (12.16) ne arată că locul geometric al punctelor  $\mathbf{x}^*$ , pentru care  $\dot{\mathbf{x}}$  este coliniar cu  $\boldsymbol{\omega}$ , aparține unei drepte ( numită *axă instantanee de rototranslație*).

Scăzând (12.16) din (12.6), rezultă:

$$(12.18) \quad \dot{\mathbf{x}} = \alpha \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \quad \text{unde} \quad \alpha = \frac{\dot{\mathbf{x}}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}^2},$$

ceea ce ne arată că viteza oricărui punct al rigidului are o componentă, egală cu  $\mathbf{v}_{\min} = \alpha \boldsymbol{\omega}$ , dirijată de-a lungul axei de rototranslație și o componentă  $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ , care dă rotația în jurul acestei axe.

Locul geometric al axelor instantanee de rototranslație în raport cu reperul fix, este o suprafață riglată numită *axoidă fixă*. Aceeași dreaptă generează în reperul mobil  $k'$  o suprafață riglată numită *axoidă mobilă*.

- Pentru a pune în evidență caracteristicile cinetice ale sistemelor rigide, vom considera  $k$  un reper inerțial fixat și  $k'$  un reper neinerțial, solidar legat de sistemul rigid, centrat în punctul  $O'$ . După cum am văzut, mișcarea sistemului rigid se descompune într-o mișcare de translație a rigidului, compusă cu o mișcare de rotație în jurul punctului  $O'$ .

În continuare vom studia *mișcarea de rotație a sistemului rigid în jurul punctului  $O'$* , presupus fixat. În acest caz, orice vector din reperul  $k'$  va fi „transportat” în reperul  $k$  prin intermediul operatorului ortogonal  $R_t: k' \rightarrow k$ . Astfel, dacă  $\mathbf{x} \in k$  este vectorul de poziție al unui punct curent  $P$  al sistemului rigid, atunci  $\mathbf{x} = R_t \mathbf{x}'$  cu  $\mathbf{x}' \in k'$ , unde  $\mathbf{x}'$  este vectorul de poziție al lui  $P$  față de reperul solidar cu rigidul.

În mod analog, putem scrie relațiile:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= R_t \dot{\mathbf{x}}' \in k, \quad \mathbf{x}' \in k'; \quad \boldsymbol{\omega} = R_t \boldsymbol{\omega}' \in k, \quad \boldsymbol{\omega}' \in k'; \\ \mathbf{K}_{O'} &= R_t \mathbf{K}'_{O'} \in k, \quad \mathbf{K}'_{O'} \in k'. \end{aligned}$$

În plus, am arătat că:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times (R_t \mathbf{x}').$$

Prin urmare, momentul cinetic al punctului  $P$ , de masă  $m$ , în raport cu polul  $O'$ , va avea forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{O'} &= \mathbf{x} \times m \dot{\mathbf{x}} = m \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \in k, \\ \mathbf{K}'_{O'} &= R_t^{-1} \mathbf{K}_{O'} = m (R_t^{-1} \mathbf{x} \times (R_t^{-1} \boldsymbol{\omega} \times R_t^{-1} \mathbf{x})) = m \mathbf{x}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}') \in k'. \end{aligned}$$



Astfel, am obținut un *operator liniar*  $A: k' \rightarrow k'$ , care „transformă” vectorul viteză unghiulară  $\omega'$  în momentul cinetic  $K'_{O'}$ :

$$(12.19) \quad A\omega' = K'_{O'} = m\mathbf{x}' \times (\omega' \times \mathbf{x}').$$

Operatorul  $A$  este *simetric*. Într-adevăr, dacă  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in k'$  avem identitatea:

$$(12.20) \quad \begin{aligned} A\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} &= m[\mathbf{x}' \times (\mathbf{X} \times \mathbf{x}')] \cdot \mathbf{Y} = m[(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})\mathbf{x}'^2 - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{X})(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{Y})] = \\ &= m(\mathbf{Y} \times \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{x}') = \mathbf{X} \cdot (A\mathbf{Y}). \end{aligned}$$

Făcând, în formula (12.20), pe  $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \omega'$  și observând că  $\dot{\mathbf{x}}^2 = (\omega' \times \mathbf{x})^2 = (\omega' \times \mathbf{x}')^2$ , rezultă că energia cinetică a punctului  $P$  este o formă pătratică în raport cu viteza unghiulară  $\omega'$ :

$$(12.21) \quad T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 = \frac{1}{2} m (\omega' \times \mathbf{x}')^2 = \frac{1}{2} A\omega' \cdot \omega' = \frac{1}{2} K'_{O'} \cdot \omega'.$$

Operatorul  $A$  se numește *operatorul de inerție* al punctului  $P$ .

Deoarece sistemul rigid este format din  $n$  puncte materiale  $P_i$ , de mase  $m_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , prin sumare obținem următoarea teoremă.

### ***Teorema 12.1***

*Momentul cinetic  $K'_{O'}$  al unui sistem rigid în raport cu punctul  $O'$  depinde liniar de viteza unghiulară  $\omega'$ , în sensul că există un operator liniar  $A: k' \rightarrow k'$ , astfel ca  $A\omega' = K'_{O'}$ . Operatorul  $A$  este simetric. Energia cinetică  $T$  a sistemului rigid este o formă pătratică în raport cu viteza unghiulară  $\omega'$ :*

$$(12.22) \quad T = \frac{1}{2} A\omega' \cdot \omega' = \frac{1}{2} K'_{O'} \cdot \omega'.$$

### ***Demonstrație:***

Prin definiție momentul cinetic al sistemului dat este suma momentelor cinetice ale punctelor materiale:

$$K'_{O'} = \sum_{i=1}^n K'_{iO'} = \sum_{i=1}^n A_i \omega' = A\omega',$$

unde, am definit operatorul  $A = \sum_{i=1}^n A_i$ . Deoarece fiecare operator  $A_i$  este simetric, rezultă că operatorul  $A$  este simetric.

În ceea ce privește energia cinetică a sistemului rigid, ea se poate scrie:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\mathbf{K}'_{iO'} \cdot \boldsymbol{\omega}') = \frac{1}{2} \mathbf{K}'_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega}' = \frac{1}{2} A \boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \quad \blacksquare$$

- După cum se știe, orice operator simetric posedă trei direcții proprii ortogonale. Fie  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \in k'$  trei vectori proprii unitari ai operatorului de inerție al sistemului rigid  $A$ , respectiv  $I_1, I_2, I_3$  valorile sale proprii. În raport cu baza  $\{\mathbf{e}'_j\}_{j=\overline{1,3}}$  momentul cinetic și energia cinetică vor avea următoarea formă:

$$(12.23) \quad \begin{aligned} K'_{jO'} &= A \omega'_j = I_j \omega'_j, \quad \forall j = \overline{1,3} \\ T &= \frac{1}{2} A \boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega}' = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1'^2 + I_2 \omega_2'^2 + I_3 \omega_3'^2). \end{aligned}$$

Axele având versorii  $\{\mathbf{e}'_j\}_{j=\overline{1,3}}$  se numesc *axe principale de inerție* ale rigidului, în raport cu  $O'$ . Valorile proprii  $I_j$  se numesc *momente principale de inerție* ale rigidului. Dacă valorile proprii sunt distincte axele de inerție sunt unic definite (vezi [5]).

Pe de altă parte, dacă sistemul rigid se rotește în jurul unei axe  $\delta$  cu viteza unghiulară  $\boldsymbol{\omega}' = \omega' \mathbf{e}$ , unde polul  $O' \in \delta$ ,  $\omega' = |\boldsymbol{\omega}'|$ , iar  $\mathbf{e}$  este versorul axei  $\delta$ , atunci energia sa cinetică va fi egală cu:

$$(12.24) \quad \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}_i')^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \omega'^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega'^2 = \frac{1}{2} I_\delta \omega'^2. \end{aligned}$$

În formula precedentă am notat cu  $r_i$  distanța de la punctul  $P_i$  la axa  $\delta$ .

$I_\delta$  este numit *moment de inerție al sistemului rigid față de axa  $\delta$* . Din relațiile (12.23)<sub>2</sub> și (12.24) rezultă că valorile proprii ale operatorului de inerție  $A$  sunt momente de inerție ale rigidului în raport cu axele principale de inerție  $\{\mathbf{e}'_j\}_{j=\overline{1,3}}$ .

Elipsoidul  $\{\boldsymbol{\omega}' / A \boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega}' = 1\} \subset k'$  se numește *elipsoid de inerție al sistemului rigid, în raport cu punctul  $O'$* . În raport cu baza de vectori proprii  $\{\mathbf{e}'_j\}_{j=\overline{1,3}}$ , ecuația elipsoidului de inerție va avea forma:

$$(12.25) \quad I_1 \omega_1'^2 + I_2 \omega_2'^2 + I_3 \omega_3'^2 = 1.$$

Prin urmare, obținem următorul rezultat:

*Axele principale ale elipsoidului de inerție coincid cu axele principale de inerție ale sistemului rigid, iar lungimile lor sunt invers proporționale cu  $\sqrt{I_j}$ ,  $j = \overline{1,3}$ .*

Din egalitățile (12.23)<sub>2</sub> și (12.25) rezultă că elipsoidul de inerție este definit pentru vectorii viteză unghiulară  $\omega'$  pentru care energia cinetică a rigidului este egală cu 1/2.

### **Teorema 12.2 (Steiner)**

*Momentele de inerție ale unui sistem rigid în raport cu două axe paralele  $\delta$  și  $\delta'$ , cu  $\delta'$  trecând prin centrul de masă  $G$  al sistemului, sunt legate de relația:*

$$(12.26) \quad I_\delta = I_{\delta'} + Mr^2, \quad ,$$

unde  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  este masă totală a sistemului, iar  $r$  este distanța dintre cele două axe.

#### **Demonstrație:**

Vom alege un sistem ortogonal de coordonate cu originea în  $G$ , axa  $Gx_3$  coincidând cu axa  $\delta'$ .

Dacă  $a_1$  și  $a_2$  sunt coordonatele dreptei  $\delta$  în acest sistem, avem egalitățile:

$$\begin{aligned} I_\delta &= \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i [(x_{1i} - a_1)^2 + (x_{2i} - a_2)^2] = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (x_{1i}^2 + x_{2i}^2) + \sum_{i=1}^n m_i (a_1^2 + a_2^2) = I_{\delta'} + Mr^2, \end{aligned}$$

deoarece  $\sum_{i=1}^n m_i x_{1i} = \sum_{i=1}^n m_i x_{2i} = 0$  ■

Deci, pentru o direcție dată, momentul de inerție în raport cu o axă ce trece prin centrul de masă al sistemului rigid este minim.

• **Exerciții și probleme:**

- 1) Folosind relațiile (12.2)-(12.4), să se calculeze componentele matricii de trecere de la reperul inerțial la reperul rotit  $C B A$ .
- 2) Să se obțină ecuațiile cinematice ale lui Euler (12.13) și (12.14).
- 3) Folosind relația (12.16), să se deducă ecuațiile scalare ale axoidei fixe.
- 4) Fie sistemul rigid  $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$ ,  $\Sigma' \cap \Sigma'' = \emptyset$ . Fie  $I_\delta$ ,  $I'_{\delta'}$  și  $I''_{\delta''}$  momentele de inerție ale sistemelor  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  și  $\Sigma''$ , în raport cu axele  $\delta$ ,  $\delta'$  și  $\delta''$ , paralele între ele și care trec prin centrele de masă ale sistemelor corespunzătoare. Să se arate că:

$$I_\delta = I'_{\delta'} + I''_{\delta''} + \frac{M'M''}{M' + M''} d^2,$$

unde  $M'$  și  $M''$  sunt masele sistemelor  $\Sigma'$  și  $\Sigma''$ , iar  $d$  este distanța dintre axele  $\delta'$  și  $\delta''$ .

- 5\*) Unui sistem rigid, având momentele principale de inerție  $I_1 > I_2 > I_3$ , îi adăugăm un punct material de masă  $\varepsilon$ , cu vector de poziție  $\mathbf{x}' = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3$ , unde  $\mathbf{e}'_1$ ,  $\mathbf{e}'_2$ ,  $\mathbf{e}'_3$  sunt axele principale de inerție ale sistemului rigid. Să se determine variația cu  $\varepsilon$  a momentului de inerție  $I_1(\varepsilon)$  al noului sistem obținut și a noii direcții principale de inerție  $\mathbf{e}'_1(\varepsilon)$ , determinate până la ordinul  $O(\varepsilon^2)$ .

## ***Indicații și răspunsuri la exercițiile și problemele propuse***

---

### • Capitolul 2

- 4) În planul mișcării considerăm un sistem de coordonate carteziene  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  și un sistem de coordonate polare  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta\}$ . Legătura dintre versorii lor este dată de relațiile 
$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2 \end{cases}$$
. Prin derivare, în raport cu timpul, obținem  $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r$ . Deoarece vectorul de poziție al punctului  $P$  are, în coordonate polare, expresia  $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r$ , rezultă, prin derivare în raport cu timpul, componentele vitezei și ale accelerației, în coordonate polare, sub forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \\ \ddot{\mathbf{x}} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta. \end{cases}$$

- 5) În cazul mișcării spațiale vom alege  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  un sistem de coordonate carteziene și  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$  un sistem de coordonate sferice. Transformarea de coordonate are forma:

$$\begin{cases} x_1 = r \sin\theta \cos\varphi \\ x_2 = r \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 = r \cos\theta \end{cases}, \quad r > 0, \quad \theta \in (0, \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Jacobianul transformării este  $J = r^2 \sin\theta > 0$ .

Dacă punctul  $P$  se mișcă pe liniile de coordonate, avem următoarele cazuri:

- pe raza vectoare el va avea viteza  $\mathbf{v}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r$ ,
- pe cercul meridian va avea viteza  $\mathbf{v}_\theta = r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$ ,
- pe cercul paralel va avea viteza  $\mathbf{v}_\varphi = r \sin\theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$ .

În general, dacă vectorul de poziție  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q^i(t))$ ,  $i = \overline{1,3}$ , al punctului  $P$  depinde de parametrul  $q^i(t)$ , atunci viteza va avea forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i} \dot{q}^i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i.$$

Deci, viteza este suma vitezelor punctului material ce s-ar mișca după liniile de coordonate. Prin urmare, componentele vitezei în coordonate sferice vor fi:

$$\dot{\mathbf{x}} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi.$$

- 6) Fie  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  traiectoria punctului material  $P$  și fie  $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}\}$  triedrul Frenet asociat. Aici,  $\boldsymbol{\tau}$  este versorul tangentei,  $\mathbf{v}$  versorul normalei principale și  $\boldsymbol{\beta}$  versorul binormalei la curbă în punctul  $P$ . Sunt cunoscute formulele lui Frenet:

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\mathbf{v}}{R} \\ \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\frac{\mathbf{v}}{T} \\ \frac{d\mathbf{v}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{\tau}}{R} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{T}, \end{cases}$$

cu  $R > 0$  raza de curbură și  $T > 0$  raza de torsiune.

Viteza lui  $P$  va avea, în triedrul lui Frenet, componentă tangențială  $\dot{\mathbf{x}} = v\boldsymbol{\tau} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}$ ,  $v = |\dot{\mathbf{x}}|$ , iar accelerația componente tangențiale și normale:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{v} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_v \mathbf{v}. \text{ Deci, accelerația se găsește în planul osculator } (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}).$$

Avem următoarele cazuri particulare:

- Dacă  $a_\tau = 0$ , obținem  $v = \text{const.}$  (*mișcare uniformă*).
  - Dacă  $a_\tau \neq 0$ ,  $a_v = 0$ , rezultă  $\frac{1}{R} = 0$  (*mișcare rectilie*).
  - Dacă  $a_\tau = a_v = 0$ , avem *mișcare rectilie și uniformă*.
- 7) În sistemul de coordonate carteziene  $(x, y)$ , aflat în plan vertical, luăm dreapta dată drept axa  $Ox$  și presupunem că la momentul inițial punctul  $P$  coincide cu originea sistemului  $O$  (vezi Figura A.1).

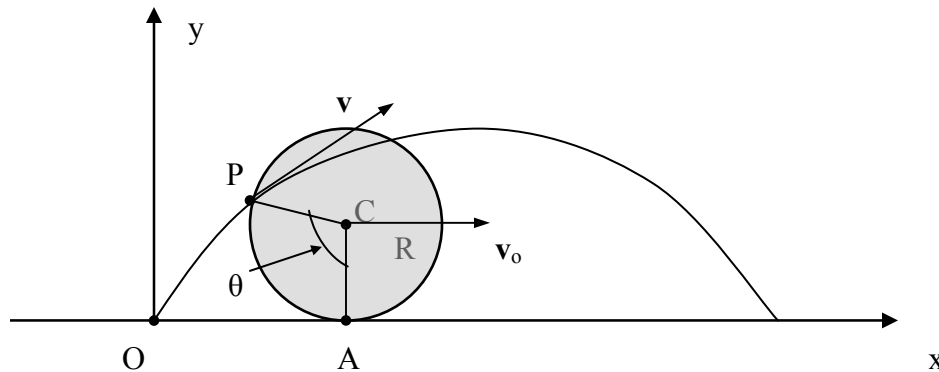


Figura A.1

Condiția de rostogolire fără alunecare se va scrie  $|OA| = \text{arc}(AP)$ . Deci,  $v_0 t = R\theta$ , sau

$\theta = \frac{v_0}{R} t = \omega t$ . Traectoria punctului  $P$  va fi dată de ecuațiile:

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin \theta) = R(\omega t - \sin \omega t) \\ y = R(1 - \cos \theta) = R(1 - \cos \omega t) \end{cases}, \quad \omega = \text{const.}$$

care reprezintă ecuațiile parametrice ale *cicloidei*. Componentele vitezei vor fi:

$$\begin{cases} \dot{x} = R\omega(1 - \cos \omega t) \\ \dot{y} = R\omega \sin \omega t \end{cases},$$

iar cele ale accelerației vor avea forma:

$$\begin{cases} \ddot{x} = R\omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{y} = R\omega^2 \cos \omega t \end{cases}.$$

Mărimea vitezei este  $v = 2R\omega \sin \frac{\omega t}{2}$ , iar vectorul viteză este normal pe  $\overrightarrow{AP}$ ,

modulul său fiind egal cu  $|\overrightarrow{AP}| \omega$ . Mărimea accelerației va fi  $a = R\omega^2$ , vectorul accelerație are direcția vectorului  $\overrightarrow{PC}$ , iar modulul ei este egal cu  $\omega^2 |\overrightarrow{PC}|$ .

8) Ecuațiile parametrice ale elicei circulare de pas  $h$  și rază  $R$ , sunt:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = \frac{h}{2\pi} \theta \end{cases}, \quad \text{unde } \theta \in \mathbf{R} \text{ este unghiul polar.}$$

Condiția de mișcare uniformă conduce la relația  $\theta = \omega t$ ,  $\omega = \text{const.}$  Prin urmare, componentele vitezei vor fi:

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\omega \sin \omega t \\ \dot{y} = R\omega \cos \omega t \\ \dot{z} = \frac{h}{2\pi} \omega \end{cases},$$

iar cele ale accelerației au forma:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R\omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} = -R\omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} .$$

• **Capitolul 3**

- 1) – 3) Se folosește formula (3.2), pentru sisteme corespunzătoare de coordonate.
- 4) Din formula (3.2) și proprietatea integralei de a fi aditivă de domeniu.
- 5) Din formula (3.2) și proprietatea integralei de a fi substractivă de domeniu.
- 6) Fie  $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \neq \mathbf{0}$ ,  $O$  un pol fixat. Atunci:

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O + \overrightarrow{PO} \times \mathbf{R}, \text{ deci } \mathbf{R} \times \mathbf{M}_P = \mathbf{R} \times \mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times \left( \overrightarrow{PO} \times \mathbf{R} \right) = \mathbf{0} .$$

$$\text{Rezultă } \overrightarrow{OP} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O}{\mathbf{R}^2} + \frac{\mathbf{R} \cdot \overrightarrow{OP}}{\mathbf{R}^2} \mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{R}, \text{ cu } \lambda \text{ parametru real .}$$

Prin urmare, locul geometric al punctelor  $P$  pentru care  $\mathbf{R}$  și  $\mathbf{M}_P$  sunt colineare este o dreaptă, care trece prin punctul având vector de poziție  $\mathbf{r}_0$  și este paralelă cu  $\mathbf{R}$ .

Pe de altă parte, dacă  $P = P(x,y,z)$ ,  $\mathbf{M}_O = (L,M,N)$  și  $\mathbf{R} = (X,Y,Z)$  sunt coordonatele lui  $P$  și componentele vectorilor  $\mathbf{R}$  și  $\mathbf{M}_O$  într-un reper ortonormat, atunci *ecuațiile scalare ale axei centrale* vor avea forma:

$$\frac{L - (yZ - zY)}{X} = \frac{M - (zX - xZ)}{Y} = \frac{N - (xY - yX)}{Z} .$$

- 7) – 10) Vezi lucrările [5-7].

• **Capitolul 4**

- 1) Soluția problemei Cauchy este  $x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t$ . Timpul de urcare va fi  $t_u = \frac{v_0}{g}$ , iar

$$\text{înălțimea maximă } x(t_u) = \frac{v_0^2}{2g} .$$

- 2) Soluția problemei Cauchy are forma:



$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha) t \\ y(t) = -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin \alpha) t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Ecuția traiectoriei va fi:

$$(A.1) \quad y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x,$$

ceea ce reprezintă o parabolă ce trece prin punctele  $O(0, 0)$  și  $B(0, x_B)$ ,  
cu  $x_B = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ . „Bătaia” va fi maximă pentru  $\alpha = \pi/4$ ,  $x_{B \max} = \frac{v_0^2}{g}$ .

Coordonatele vârfurilor traiectoriei sunt

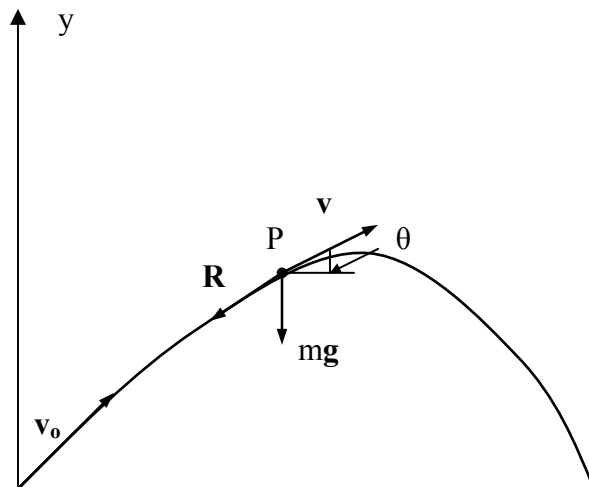
$$x_v = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha, \quad y_v = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha,$$

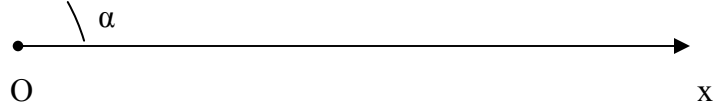
ele aflându-se pe elipsa  $x^2 + 4y^2 = \frac{2v_0^2}{g} y$ .

Punctele  $P(X, Y)$  din planul  $Oxy$  prin care pot trece parabolele (A.1), pentru  $\alpha$  variabil, se află în interiorul *parabolei de siguranță*  $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2$ .

3) Problema Cauchy dată, va avea următoarea formă, în proiecție pe axele sistemului cartezian  $Oxy$ , situat în plan vertical (vezi *Figura A.2*):

$$(A.2) \quad \begin{cases} \ddot{x} = -g\varphi(v)\frac{\dot{x}}{v} \\ \ddot{y} = -g - g\varphi(v)\frac{\dot{y}}{v} \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$





**Figura A.2**

Sistemul diferențial (A.2) este neliniar. Pentru a-l aduce la o formă integrabilă, vom efectua schimbarea de variabile  $(\dot{x}, \dot{y}) \rightarrow (v, \theta)$ , unde  $v = |\dot{\mathbf{x}}|$ , iar  $\theta$  este unghiul vitezei  $\dot{\mathbf{x}}$  cu axa  $Ox$ .

Astfel, obținem componentele vitezei:  $\dot{x} = v \cos \theta$ ,  $\dot{y} = v \sin \theta$ .

Din sistemul (A.2) rezultă:

$$\begin{cases} \dot{v} \cos \theta - v \dot{\theta} \sin \theta = -g \varphi(v) \cos \theta \\ \dot{v} \sin \theta + v \dot{\theta} \cos \theta = -g - g \varphi(v) \sin \theta \end{cases}$$

sau, încă:

$$(A.3) \quad \begin{cases} \dot{v} = -g \sin \theta - g \varphi(v) \\ v \dot{\theta} = -g \cos \theta \end{cases}, \quad v(0) = v_0, \quad \theta(0) = \alpha.$$

Am obținut un sistem diferențial neliniar, de ordinul 1, în *variabilele hodografice*  $(v, \theta)$ . Eliminând timpul între cele două ecuații (A.3), rezultă *ecuația fundamentală a balisticii exterioare*:

$$(A.4) \quad \frac{dv}{d\theta} = v \left[ \operatorname{tg} \theta + \frac{\varphi(v)}{\cos \theta} \right], \quad v(\alpha) = v_0.$$

Presupunând cunoscută soluția  $v(\theta)$  a problemei Cauchy (A.4), putem afla *traectoria*, sub forma:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} v^2(\zeta) d\zeta \\ y = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} v^2(\zeta) \operatorname{tg} \zeta d\zeta \end{cases},$$

și *ecuația timpului*:  $t = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{v(\zeta)}{\cos \zeta} d\zeta$ .

4) Notând cu  $\omega^2 = \frac{k}{m} = \text{const.}$ , problema Cauchy asociată ecuației *oscilatorului liniar* devine:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Soluția ei se obține ușor, sub forma:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t .$$

Pentru  $x_0 \neq 0$ , avem reprezentarea  $x_0 = a \cos \varphi_0$ ,  $\frac{v_0}{\omega} = a \sin \varphi_0$ , unde  $a$  definește *amplitudinea*,  $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$ , iar  $\varphi_0$  *diferența de fază*,  $\varphi_0 = \arctg\left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$ . Prin urmare:

$$x(t) = a \cos(\omega t - \varphi_0) ,$$

unde  $\omega$  este *viteza unghiulară* (analogia cu mișcarea circulară uniformă).  
Perioada de oscilație va fi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} .$$

- 5) Notând cu  $\omega^2 = \frac{k}{m} = \text{const.}$ , problema Cauchy asociată ecuației *oscilatorului liniar amortizat* va fi:

$$\ddot{x} + \lambda^2 \dot{x} + \omega^2 x = 0 , \quad x(0) = x_0 , \quad \dot{x}(0) = 0 .$$

Presupunând că  $\lambda^2$  este suficient de mic, astfel ca discriminantul ecuației caracteristice  $\Delta = \lambda^4 - 4\omega^2 < 0$ , rezultă următoarea soluție:

$$x = x_0 e^{\frac{-\lambda^2}{2}t} \left( \cos \gamma t + \frac{\lambda^2}{2\gamma} \sin \gamma t \right) , \quad \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega^2 - \lambda^4} .$$

Notând cu  $x_0 = a_0 \cos \varphi_0$ ,  $\frac{\lambda^2}{2\gamma} x_0 = a_0 \sin \varphi_0$ , obținem reprezentarea soluției sub forma:

$$x = a(t) \cos(\gamma t - \varphi_0) , \quad a(t) = a_0 e^{\frac{-\lambda^2}{2}t} .$$

Evident că amplitudinea tinde la zero,  $a(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .  
Perioada de oscilație va fi:

$$T_a = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^2}} > T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

- 6) Aplicând definiția stabilității poziției de echilibru  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ , soluției problemei oscilatorului liniar 4):

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

rezultă că  $|x(t)| < \varepsilon$ ,  $|\dot{x}(t)| < \varepsilon$ , dacă  $|x_0| < \delta$ ,  $|\dot{x}_0| < \delta$ , unde

$$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{1 + 1/\omega}, \frac{\varepsilon}{1 + \omega}\right).$$

### • Capitolul 6

- 2) Proiectând, pe verticala locului, condiția de echilibru a punctului material  $P$ , de masă  $m$ , aflat la suprafața Pământului, obținem  $G_0 = mg_0 = f \frac{mM}{R_0^2}$ , unde  $g_0$  este mărimea accelerației gravitaționale de la suprafața Pământului. La distanța  $r$  de centrul Pământului, aceeași condiție va avea forma  $G = mg = f \frac{mM}{r^2} = G_0 \left(\frac{R_0}{r}\right)^2$ , unde  $g$  este mărimea accelerației gravitaționale la distanța  $r$ . Lucrul mecanic elementar efectuat în deplasarea pe verticala locului, sub acțiunea forței de atracție universală, va avea expresia  $dL = \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x} = -G_0 \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 dr$ . Lucrul mecanic necesar deplasării punctului material de la suprafața Pământului, la distanța  $R$  de centrul Pământului, va fi dat de expresia:

$$L = \int_{R_0}^R dL = G_0 R_0^2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right).$$

Din teorema de conservare a energiei, ținând cont că viteza inițială a punctului material este nulă, obținem viteza sa de cădere pe suprafața Pământului, sub forma:

$$v = \sqrt{2g_0 R_0 \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)}.$$

Dacă  $R \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow \sqrt{2g_0 R_0} = v_\infty$ . Pentru  $R_0 = 6380 \text{ km}$  și  $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ , rezultă că  $v_\infty = 11,18 \text{ km/s}$  (a doua viteză cosmică).

- 3) Folosind problema precedentă și distribuția de accelerații în mișcarea circulară uniformă, obținem:

$$g_h = g_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + h)^2} = \frac{v^2}{R_0 + h},$$

de unde, rezultă:  $v = \sqrt{g_h (R_0 + h)}$ .

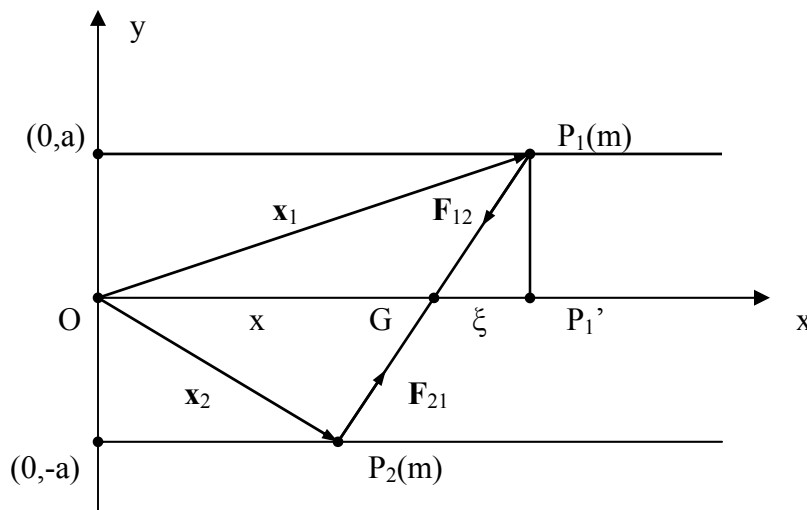
Viteza unghiulară va fi  $\omega = \frac{v}{R_0 + h} = \sqrt{\frac{g_h}{R_0 + h}}$ , în timp ce perioada de revoluție va

$$\text{rezulta } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R_0 + h}{g_h}}.$$

Pentru  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ,  $R_0 = 6.380 \text{ km}$  și  $h = 500 \text{ km}$ , rezultă  $g_{500} = 8,42 \text{ m/s}^2$ ,  $v = 7,61 \text{ km/s}$  și  $T = 1 \text{ h } 35'$ .

## • Capitolul 8

- 2) Sistemul are 2 grade de libertate:  $x = |OG|$  și  $\xi = |GP_1|$  (vezi Figura A.3).



**Figura A.3**

Forțele interioare ale sistemului vor avea expresiile:

$$\mathbf{F}_{12} = -k|P_1P_2|\frac{\overrightarrow{P_2P_1}}{|P_1P_2|} = -k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = -\mathbf{F}_{21}, \quad k > 0.$$

*Teorema de mișcare a centrului de masă*, proiectată pe axa  $Ox$  va avea forma:  
 $2m\ddot{x} = 0$ , de unde obținem  $x(t) = x_0 + v_0 t$ .

Deci, centrul de masă  $G$  are o *mișcare uniformă* pe axa  $Ox$ .

Vectorii de poziție ai punctelor  $P_1$  și  $P_2$  vor fi:

$$\mathbf{x}_1 = (x + \xi)\mathbf{i} + a\mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_2 = (x - \xi)\mathbf{i} - a\mathbf{j}.$$

Din teorema energiei  $dT = dL_{\text{int}}$ , scrisă sub forma

$$d\left[\frac{m}{2}(\dot{\mathbf{x}}_1^2 + \dot{\mathbf{x}}_2^2)\right] = \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{x}_1 + \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{x}_2,$$

rezultă:

$$d[m(\dot{\xi}^2 + \dot{x}^2)] = -2kd\xi^2.$$

Ținând cont de mișcarea uniformă a centrului de masă  $G$  ( $\dot{x} = v_0$ ), obținem ecuația diferențială:

$$\dot{\xi}^2 = \omega^2(l^2 - \xi^2)$$

cu  $\omega$  și  $l$  determinate de constantele problemei. Prin urmare,

$$\xi(t) = l \sin(\pm \omega t + C).$$

În concluzie, punctele  $P_1$  și  $P_2$  au o mișcare oscilatorie de-a lungul dreptelor  $y = \pm a$ , în raport cu centrul de masă  $G$ .

3) Deoarece sistemul este închis, centrul său de masă se va mișca rectiliniu și uniform.

Forțele interne, de tip elastic, se vor scrie:  $\mathbf{F}_{ij} = -k(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ ,  $k > 0$ , unde  $\mathbf{x}_i$  este vectorul de poziție al punctului  $P_i$ .

Considerând punctul  $P_i$ , ecuația sa de mișcare va fi:

$$m\ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{ij} = k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{x}_j - (n-1)k\mathbf{x}_i = k \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j - nk\mathbf{x}_i.$$

Pe de altă parte, vectorul de poziție  $\xi$  al centrului de masă  $G$  va avea forma  $nm\xi = m \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j$ . De aici, rezultă:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \frac{kn}{m}(\xi - \mathbf{x}_i) = \frac{kn}{m} \overrightarrow{P_i G}.$$

Deci, accelerația lui  $P_i$  este coliniară cu vectorul de poziție al lui  $P_i$  în raport cu  $G$ ,  $\overrightarrow{GP_i} = \mathbf{x}'_i$ .

Folosind relația  $\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i - \xi$  și faptul că centrul de masă se mișcă rectiliniu și uniform, deducem că  $\ddot{\mathbf{x}}'_i = \ddot{\mathbf{x}}_i = -\frac{kn}{m} \mathbf{x}'_i$ .

De aici, rezultă

$$\mathbf{x}'_i(t) = \overrightarrow{C_1} \cos \omega t + \overrightarrow{C_2} \sin \omega t, \quad \omega^2 = \frac{kn}{m} = \text{const.}$$

În concluzie, traiectoriile punctelor  $P_i$ , relative la centrul de masă  $G$ , sunt elipse cu centrul în  $G$ .

- 4) Sistemul are 3 grade de libertate dacă firul este întins și 4 grade de libertate dacă firul nu este întins.

În primul caz, vom alege drept parametrii coordonatele  $\xi_1$  și  $\xi_2$  ale centrului de masă

$G$  al sistemului și unghiul  $\theta$  dintre vectorul  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  și axa  $Ox_1$ .

Atunci, vectorii de poziție ai punctelor  $P_1$  și  $P_2$  vor avea forma:

$$\mathbf{x}_1 = \xi + l(\cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \theta \mathbf{i}_2), \quad \mathbf{x}_2 = \xi - l(\cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \theta \mathbf{i}_2),$$

unde  $\xi = \xi_1 \mathbf{i}_1 + \xi_2 \mathbf{i}_2$  este vectorul de poziție al lui  $G$ .

Forțele interne ale sistemului sunt reprezentate de tensiunile în fir

$$\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_2 = \frac{T}{2l} \overrightarrow{P_1 P_2}, \quad T > 0.$$

Dacă firul *nu* este întins,  $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = 0$ , iar punctele  $P_1$  și  $P_2$  se mișcă liber.

- a) Forțele exterioare sistemului vor fi, în acest caz, de forma:

$$\mathbf{F}_1 = -k^2 m(\xi_1 + l \cos \theta) \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{F}_2 = -k^2 m(\xi_1 - l \cos \theta) \mathbf{i}_1.$$

Din teorema de mișcare a centrului de masă rezultă:

$$2m\ddot{\xi} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -2k^2 m \xi_1 \mathbf{i}_1 ,$$

sau, pe componente:

$$\ddot{\xi}_1 = -k^2 \xi_1 , \quad \ddot{\xi}_2 = 0 .$$

Deci, mișcarea centrului de masă va fi dată de relațiile:

$$\xi_1 = C_1 \cos(kt - C_2), \quad \xi_2 = C_3 t + C_4 .$$

Pentru a obține mișcare în raport cu centrul de masă, va trebui să determinăm unghiul  $\theta$ . El va fi obținut din teorema energiei, scrisă în raport cu centrul de masă  $G$ .

Energia cinetică va fi  $T_G = ml^2 \dot{\theta}^2$ ,  $dL_{\text{int}}^G = 0$  (dacă firul este întins sistemul este rigid, iar dacă el nu este întins forțele interne sunt nule), iar  $dL_{\text{ext}}^G = (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \cdot (-l \sin \theta \mathbf{i}_1 + l \cos \theta \mathbf{i}_2) d\theta = k^2 ml^2 \sin 2\theta d\theta$ .

De aici, se obține ecuația diferențială:

$$2\ddot{\theta} = k^2 \sin 2\theta ,$$

care are integrala primă:

$$\dot{\theta}^2 = -k^2 \cos^2 \theta + h .$$

De aici, printr-o cuadratură, putem afla unghiul  $\theta$ .

b) În al doilea caz, forțele exterioare sistemului vor avea forma:

$$\mathbf{F}_1 = -k^2 m(\mathbf{x}_1 - a\mathbf{i}_1), \quad \mathbf{F}_2 = -k^2 m(\mathbf{x}_2 + a\mathbf{i}_1) .$$

Din teorema de mișcare a centrului de masă, obținem:

$$\ddot{\xi} = -k^2 \xi ,$$

de unde, rezultă:

$$\vec{\xi} = \overrightarrow{C_1} \cos kt + \overrightarrow{C_2} \sin kt .$$

Deci, centrul de masă  $G$  se mișcă pe o elipsă de centru  $O$ , ca și când el ar fi atras de  $O$  cu o forță elastică de modul  $k^2$ .

Utilizând teorema energiei, găsim că unghiul  $\theta$  este soluția ecuației diferențiale:



$$\ddot{\theta} = -k^2 \frac{a}{l} \sin \theta \quad ,$$

care are integrala primă:

$$\dot{\theta}^2 = 2k^2 \frac{a}{l} \cos \theta + h \quad .$$

## • Capitolul 10

- 1) Vom alege sistemul ortonormat  $Oxy$  în planul mișcării planetei  $P$ , unde Soarele  $S$  se află în originea  $O$ . Vectorul de poziție al lui  $P$  va fi dat de expresia  $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r$ ,  $r = |\mathbf{x}|$ , iar  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$  sunt versorii bazei ortonormate, asociate coordonatelor polare  $(r, \theta)$  din planul  $Oxy$ .

Pornind de la legile lui Kepler:

- planetele descriu traiectorii plane (anume, elipse) în jurul Soarelui, aflat într-unul dintre focare;
- mișcarea planetelor se face cu viteză areolară constantă;
- raportul dintre cubul semiaxei mari a elipsei și pătratul perioadei de revoluție este același pentru toate planetele,

vom obține expresia forței de atracție universală.

Componentele vitezei în această bază vor fi  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$ . Calculând  $|\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}| = r^2 \dot{\theta}$ , rezultă din legea a doua a lui Kepler că  $r^2 \dot{\theta} = C = \text{const.}$  (*legea ariilor*). În aceste condiții, teorema momentului cinetic, implică:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{x} \times (m\dot{\mathbf{x}})] = m \frac{d}{dt} (C \mathbf{k}) = \mathbf{x} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad ,$$

unde  $\mathbf{k}$  este versorul axei fixe  $Oz$ , normale planului  $Oxy$ .

Deci, forța  $\mathbf{F}$  este centrală,  $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_r$ ,  $F = |\mathbf{F}|$ .

Din legea întâia a lui Kepler rezultă traiectoria în coordonate polare, sub forma:

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_1)}{p}, \quad 0 < e < 1.$$

Folosind ecuația lui Clairaut  $C^2 \mu \left[ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] = -\frac{\partial V}{\partial u}$ , unde  $\mu = \frac{mM}{m+M}$  este masa

echivalentă, iar  $V = V(u)$  este energia potențială, obținem  $V = -\frac{C^2 \mu}{p} \cdot u$ .

Deci,  $F = -\frac{C^2 \mu}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$ , unde parametrul elipsei  $p = \frac{b^2}{a}$ .

În fine, utilizând legea ariilor și legea a treia a lui Kepler, rezultă  $\int_0^{T_0} C dt = CT_0 = \pm 2\pi ab$ , unde  $T_0$  este perioada de revoluție,  $\frac{1}{2}C$  viteza areolară constantă, iar  $\pi ab$  este aria elipsei.

Deci,  $F = -\frac{4\pi^2 a^3}{T_0^2} \mu \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{fmM}{r^2}$ , unde am notat cu  $f = \frac{4\pi^2 a^3}{T_0^2} \cdot \frac{1}{m+M} = \text{const.}$ . În

concluzie, forța de atracție universală va avea expresia  $\mathbf{F} = -\frac{fmM}{r^2} \mathbf{e}_r = -\frac{fmM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}$ .

- 3) Dacă traiectoria este parabolică avem  $r(\theta) = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\theta - \theta_1}{2}}$ . Din legea ariilor  $r^2 \dot{\phi} = C$ ,

unde anomalia adevărată  $\varphi = \theta - \theta_1$ , rezultă  $C dt = r^2(\varphi) d\varphi$ .

Integrând, obținem ecuația timpului în mișcarea parabolică

$$\frac{p^2}{2} \left( tg \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{\varphi}{2} \right) = C(t - t_0).$$

### • Capitolul 11

- 4) Alegem reperul fix  $Ox_1x_2$  cu originea în punctul  $B$  și axa  $Ox_1$  în direcția și sensul curgerii apei. Fie  $\mathbf{e}_1$  și  $\mathbf{e}_2$  versorii axelor de coordonate și  $x_1^0, x_2^0$  coordonatele punctului  $A$ .

- a) Dacă notăm cu  $\mathbf{v}$  viteza absolută și cu  $\mathbf{u}$  versorul vitezei relative, avem relația:

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_1 + \frac{v_0}{\lambda} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2,$$

unde  $\varphi$  este unghiul dintre  $\mathbf{u}$  și  $\mathbf{e}_1$ .

$$\text{Din ipoteze rezultă că } \mathbf{v} = -v \cdot \frac{\overrightarrow{BA}}{\left| \overrightarrow{BA} \right|} = -\frac{v}{\sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}} (x_1^0 \mathbf{e}_1 + x_2^0 \mathbf{e}_2).$$

$$\text{Deci, } \mathbf{u} = -\frac{\lambda v}{v_0 \sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}} (x_1^0 \mathbf{e}_1 + x_2^0 \mathbf{e}_2) - \lambda \mathbf{e}_1.$$

Prin urmare, proiectând pe axe rezultă

$$\begin{cases} -\frac{\lambda v}{v_0 \sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}} x_1^0 - \lambda = \cos \varphi \\ -\frac{\lambda v}{v_0 \sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}} x_2^0 = \sin \varphi \end{cases} .$$

Astfel, obținem ecuația trigonometrică în  $\varphi$ , care ne dă direcția cerută, sub forma:

$$\frac{\lambda + \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{x_1^0}{x_2^0}, \quad \lambda > 0 .$$

Ecuația precedentă va avea soluții dacă  $\lambda \leq \sqrt{1 + \left(\frac{x_1^0}{x_2^0}\right)^2}$ .

- b) Fie  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  coordonatele punctului  $P$ , care marchează poziția vaporului în cursul traversării râului. Viteza absolută a lui  $P$  va avea forma:

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_1 + \frac{v_0}{\lambda} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{PA}}{\left| \overrightarrow{PA} \right|} = -\frac{x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} .$$

Pe componente, obținem sistemul diferențial:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_0 - \frac{v_0 x_1}{\lambda \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \dot{x}_2 = -\frac{v_0 x_2}{\lambda \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{cases}$$

cu datele inițiale  $x_1(0) = x_1^0$ ,  $x_2(0) = x_2^0$ .

Eliminând timpul în sistemul diferențial precedent, rezultă ecuația diferențială a traiectoriei:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1}{x_2} - \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2} .$$

Această ecuație fiind omogenă, vom face substituția clasică  $x_1 = x_2 \cdot z$ . De aici, deducem ecuația diferențială în  $z(x_2)$ :

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\lambda \frac{dx_2}{x_2},$$

care are soluția:

$$z + \sqrt{1+z^2} = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_2} = \left(\frac{C}{x_2}\right)^\lambda,$$

unde  $C$  este o constantă de integrare.

Rezultă *ecuația traiectoriei absolute* sub forma:

$$x_1 = \frac{x_2}{2} \left[ \left(\frac{C}{x_2}\right)^\lambda - \left(\frac{x_2}{C}\right)^\lambda \right].$$

Dacă  $\lambda < 1$ , coordonatele  $x_1 = x_2 = 0$  satisfac ecuația traiectoriei, deci vaporul ajunge în  $A$ .

Dacă  $\lambda > 1$ , din  $x_2 \rightarrow 0$  rezultă  $x_1 \rightarrow \infty$ .

Dacă  $\lambda = 1$ , traiectoria este o parabolă de axă  $Ox_1$ .

Pentru a afla timpul de traversare, vom folosi ecuația  $\frac{dx_2}{dt} = -\frac{v_0 x_2}{\lambda \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$  și ecuația traiectoriei

$$x_1 = \frac{x_2}{2} \left[ \left(\frac{C}{x_2}\right)^\lambda - \left(\frac{x_2}{C}\right)^\lambda \right]. \text{ Se obține } dt = -\frac{\lambda}{2v_0} \left[ \left(\frac{C}{x_2}\right)^\lambda + \left(\frac{x_2}{C}\right)^\lambda \right] dx_2.$$

Integrând această ecuație diferențială, cu datele inițiale  $x_1(0) = x_1^0$ ,  $x_2(0) = x_2^0$ , obținem *ecuația timpului*:

$$t = \begin{cases} C_1 - \frac{\lambda x_2}{2v_0} \left[ \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{C}{x_2}\right)^\lambda + \frac{1}{1+\lambda} \left(\frac{x_2}{C}\right)^\lambda \right], & \lambda \neq 1 \\ \frac{1}{2v_0} \left[ C \ln \frac{x_2^0}{x_2} + \frac{(x_2^0)^2 - x_2^2}{2C} \right], & \lambda = 1 \end{cases}.$$

Constantele de integrare au forma:

$$C = x_2^0 \left( \frac{x_1^0}{x_2^0} + \sqrt{1 + \left(\frac{x_1^0}{x_2^0}\right)^2} \right)^{1/\lambda}, \quad C_1 = \frac{\lambda x_2^0}{2v_0} \left[ \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{C}{x_2^0}\right)^\lambda + \frac{1}{1+\lambda} \left(\frac{x_2^0}{C}\right)^\lambda \right].$$

În ecuația timpului, făcând  $x_2 \rightarrow 0$ , obținem timpul de traversare  $T = C_1$ , dacă  $\lambda < 1$ , și  $T \rightarrow \infty$ , dacă  $\lambda \geq 1$ .

- 5) Luăm punctul de pornire a înotătorului drept originea  $O$  a sistemului cartezian fix  $Ox_1x_2$ , cu axa  $Ox_1$  paralelă și de același sens cu viteza apei și axa  $Ox_2$  îndreptată spre râu. Fie  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  versorii acestui sistem de coordonate.  
Din ipoteze rezultă că apa va avea viteza:

$$\mathbf{v}_a = \begin{cases} \frac{v_0}{h} x_2 \mathbf{e}_1, & x_2 \in [0, h] \\ \frac{v_0}{h} (2h - x_2) \mathbf{e}_1, & x_2 \in [h, 2h] \end{cases},$$

iar viteza relativă a înotătorului va fi  $\mathbf{v}_r = \frac{v_0}{\lambda} \mathbf{e}_2$ .

Prin urmare, viteza absolută este dată de expresiile:

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \frac{v_0}{h} x_2 \mathbf{e}_1 + \frac{v_0}{\lambda} \mathbf{e}_2, & x_2 \in [0, h] \\ \frac{v_0}{h} (2h - x_2) \mathbf{e}_1 + \frac{v_0}{\lambda} \mathbf{e}_2, & x_2 \in [h, 2h] \end{cases}.$$

De aici, proiectând pe axele sistemului de coordonate, rezultă sistemul de ecuații diferențiale:

$$\dot{x}_2 = \frac{v_0}{\lambda}, \quad \dot{x}_1 = \begin{cases} \frac{v_0}{h} x_2, & x_2 \in [0, h] \\ \frac{v_0}{h} (2h - x_2), & x_2 \in [h, 2h] \end{cases},$$

asociat condițiilor inițiale  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ .

Soluția sa va fi:

$$x_2 = \frac{v_0}{\lambda} t, \quad x_1 = \begin{cases} \frac{v_0^2}{2h\lambda} t^2, & t \in \left[0, \frac{h\lambda}{v_0}\right] \\ \frac{v_0^2 t}{2h\lambda} \left(\frac{4h\lambda}{v_0} - t\right) - h\lambda, & t \in \left[\frac{h\lambda}{v_0}, \frac{2h\lambda}{v_0}\right] \end{cases}.$$

Eliminându-l pe  $t$ , din ecuațiile parametrice precedente, obținem *ecuația traiectoriei absolute*:

$$x_1 = \begin{cases} \frac{\lambda}{2h} x_2^2, & x_2 \in [0, h] \\ \frac{\lambda}{2h} x_2 (4h - x_2) - h\lambda, & x_2 \in [h, 2h] \end{cases}.$$

Deci, traiectoria absolută este formată din două arce de parabolă, simetrice în raport cu punctul  $\left(\frac{\lambda h}{2}, h\right)$ . Înotătorul va atinge malul opus în punctul  $(\lambda h, 2h)$ . Timpul de traversare va fi  $T = \frac{2h\lambda}{v_0}$ .

- 6) Din enunț rezultă că viteza unghiulară a mișcării punctului pe cerc este egală cu viteza unghiulară de rotație a planului cercului. Fie  $\omega$  această viteză unghiulară constantă și  $R$  raza cercului.

Fie  $Ox_1x_2x_3$  un reper fix cu originea în centrul cercului și  $Ox'_1x'_2x'_3$  un reper mobil, solidar cu cercul, astfel ca  $Ox_3$  coincide cu  $Ox'_3$ , planul  $Ox'_1x'_3$  conține cercul, iar planul  $Ox_1x_3$  reprezintă poziția inițială a planului mobil  $Ox'_1x'_3$ .

La momentul inițial punctul  $P$  se află pe axa  $Ox_1$ . În aceste notații, avem relațiile:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3 = \omega \mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 \cos \omega t + \mathbf{e}_2 \sin \omega t, \quad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 \sin \omega t + \mathbf{e}_2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

În plus, vectorul de poziție al lui  $P$  în reperul fix va fi:

$$\mathbf{x} = R (\mathbf{e}_1 \cos^2 \omega t + \mathbf{e}_2 \sin \omega t \cos \omega t + \mathbf{e}_3 \sin \omega t).$$

Rezultă că viteza absolută a lui  $P$  va avea forma:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = R\omega (-\mathbf{e}_1 \sin 2\omega t + \mathbf{e}_2 \cos 2\omega t + \mathbf{e}_3 \cos \omega t),$$

iar accelerația absolută va fi:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}} = R\omega^2 (-2\mathbf{e}_1 \cos 2\omega t - 2\mathbf{e}_2 \sin 2\omega t - \mathbf{e}_3 \sin \omega t).$$

Ecuatiile parametrice ale traiectoriei absolute vor fi:

$$x_1 = R \cos^2 \omega t, \quad x_2 = R \sin \omega t \cos \omega t, \quad x_3 = R \sin \omega t.$$

Ea reprezintă o curbă sferică, obținută prin intersecția sferei  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$  cu cilindrul  $x_1^2 + x_2^2 = Rx_1$  (curba lui Viviani).

• **Capitolul 12**

1) Din expresiile matricilor:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rezultă matricea de trecere de la reperul inerțial  $k$  la reperul neinerțial  $k'$ , sub forma:

$$C B A = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

3) Din relațiile (12.16), având în vedere componentele vectorilor implicați, în baza ortonormată  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , rezultă ecuațiile scalare ale axoidei fixe, sub forma:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_{01} + \omega_2(x_3^* - x_{03}) - \omega_3(x_2^* - x_{02})}{\omega_1} &= \frac{\dot{x}_{02} + \omega_3(x_1^* - x_{01}) - \omega_1(x_3^* - x_{03})}{\omega_2} = \\ &= \frac{\dot{x}_{03} + \omega_1(x_2^* - x_{02}) - \omega_2(x_1^* - x_{01})}{\omega_3}. \end{aligned}$$

4) Fie  $d'$  distanța dintre axele  $\delta'$  și  $\delta$ , respectiv  $d''$  distanța dintre axele  $\delta''$  și  $\delta$ . Din definiția momentului de inerție față de o axă, avem relația  $I_\delta = I'_{\delta'} + I''_{\delta''}$ , iar din teorema lui Steiner rezultă  $I'_{\delta'} = I'_{\delta'} + M'd'^2$ ,  $I''_{\delta''} = I''_{\delta''} + M''d''^2$ . Pe de altă parte, din definiția centrului de masă, deducem  $M'd' = M''d''$ ,  $d' + d'' = d$ . Rezultă că:

$$d' = \frac{M''}{M' + M''} d \text{ și } d'' = \frac{M'}{M' + M''} d.$$

Astfel, obținem generalizarea teoremei lui Steiner:

$$I_\delta = I'_{\delta'} + I''_{\delta''} + M'd'^2 + M''d''^2 = I'_{\delta'} + I''_{\delta''} + \frac{M'M''}{M' + M''} d^2.$$

## ***Bibliografie***

- [1] R. Anton, *Probleme de mecanică*, Ed. Didactică și Pedagogică, 1978.
- [2] V. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, MIR, 1974.
- [3] V. Arnold, *Ecuații diferențiale ordinare*, Ed. Științifică și Enciclopedică, 1978.
- [4] V. Barbu, *Ecuații diferențiale*, Ed. Junimea, 1985.
- [5] I. Beju, E. Sóos, P.P. Teodorescu, *Tehnici de calcul vectorial și aplicații*, Ed. Tehnică, 1976.
- [6] L. Dragoș, *Principiile mecanicii analitice*, Ed. Tehnică, 1976.
- [7] C. Iacob, *Mecanică teoretică*, Ed. Didactică și Pedagogică, 1980.
- [8] C. Iacob, Gh. I. Ștefan, M. Soare, L. Dragoș, *Dicționar de mecanică*, Ed. Științifică și Enciclopedică, 1980.
- [9] A. Koestler, *Lunaticii – Evoluția concepției despre Univers de la Pitagora la Newton*, Ed. Humanitas, 1995.
- [10] D. Massier, *Mecanică. Aplicații*, partea I, Ed. Universității București, 1998.
- [11] L. Meirovitch, *Methods of analytical dynamics*, McGraw-Hill, 1970.
- [12] M. Nicolescu, S. Marcus, N. Dinculeanu, *Analiză matematică*, Ed. Didactică și Pedagogică, 1980.
- [13] L. Ornea, A. Turtoi, *O introducere în geometrie*, Ed. Theta, 2000.
- [14] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1966.
- [15] M. Stavinschi, P. Popescu, M. Liculescu (ed.), *Anuarul Astronomic 2003*, Ed. Academiei Române, 2002.
- [16] P.P. Teodorescu, *Sisteme mecanice. Modele clasice*, vol. II, Ed. Tehnică, 1988.
- [17] V. Vladimirov, *Distributions en physique mathématique*, MIR, 1979.